Soluciones - Funciones elementales

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Es una fracción, así que excluimos los valores que anulan el denominador: $x^2 - 4 = 0$ si $x = \pm 2$. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
b. Es una raíz cuadrada, así que el radicando debe ser no negativo: $2x - 6 \geq 0$, luego $x \geq 3$. Dominio: $[3, +\infty)$.
c. El argumento del logaritmo debe ser positivo: $5 - x > 0$, luego x. Dominio: $(-\infty, 5)$.
d. Hay dos condiciones a la vez. Radicando: $x^2 - 9 \geq 0$, es decir, $x \leq -3$ o $x \geq 3$. Denominador: $x \neq 4$. Juntándolas, el dominio es $(-\infty, -3] \cup [3, 4) \cup (4, +\infty)$.

Solución del ejercicio 2

a. $f(-1) = 1 + 4 + 3 = 8$, $f(0) = 3$, $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$, $f(5) = 25 - 20 + 3 = 8$.
b. $x_v = \dfrac{4}{2} = 2$ y $f(2) = -1$. Vértice $(2, -1)$ y eje $x = 2$.
c. Con el eje OY: $(0, 3)$. Con el eje OX: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$, los puntos $(1, 0)$ y $(3, 0)$.
d. Como $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba: recorrido $[-1, +\infty)$; decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

Solución del ejercicio 3

a. La pendiente es el cociente de incrementos: $m = \dfrac{-3 - 5}{3 - (-1)} = \dfrac{-8}{4} = -2$.
Sustituimos el punto A en $y = -2x + n$: $5 = -2 \cdot (-1) + n$, luego $n = 3$. La recta es $y = -2x + 3$. Comprobación con B: $-6 + 3 = -3$ ✓.
b. Corte con el eje OY: $x = 0$ da $y = 3$, punto $(0, 3)$. Corte con el eje OX: $-2x + 3 = 0$, luego $x = \frac{3}{2}$, punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.
c. Para $x = 5$: $y = -10 + 3 = -7$, que coincide con la ordenada del punto, así que sí pertenece a la recta. Como la pendiente $m = -2$ es negativa, la función es decreciente: y baja 2 unidades por cada unidad que aumenta x.

Solución del ejercicio 4

a. $x_v = -\dfrac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$ y $f(2) = -4 + 8 + 5 = 9$. Vértice $(2, 9)$; eje $x = 2$.
b. Eje OY: $(0, 5)$. Eje OX: $-x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1$ o $x = 5$.

c. Dominio $\mathbb{R}$; recorrido $(-\infty, 9]$; máximo absoluto 9 en $x = 2$; crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$.
d. $f(1) = -1 + 4 + 5 = 8$ y $f(3) = -9 + 12 + 5 = 8$. Son iguales: puntos simétricos respecto de $x = 2$.

Solución del ejercicio 5

a. El denominador se anula en $x = 3$, luego el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Como el numerador vale $7 \neq 0$ en $x = 3$, la función tiende a infinito: hay asíntota vertical $x = 3$.
b. Numerador y denominador tienen el mismo grado, así que el límite es el cociente de coeficientes principales: $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2$. Asíntota horizontal $y = 2$.
c. Eje OX: la fracción es cero si lo es el numerador, $2x + 1 = 0$, luego $x = -\frac{1}{2}$, punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Eje OY: $f(0) = -\frac{1}{3}$, punto $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.
d. $2 + \dfrac{7}{x-3} = \dfrac{2(x-3)+7}{x-3} = \dfrac{2x+1}{x-3}$. Como $\frac{7}{x-3}$ nunca vale 0, f nunca vale 2: el recorrido es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Solución del ejercicio 6

a. Sustituimos en $f(x) = 2^x$: $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$, $f(0) = 2^0 = 1$ y $f(3) = 2^3 = 8$.
b. $\log_2 x$ es el exponente al que hay que elevar 2 para obtener x: $g\left(\frac{1}{4}\right) = -2$ porque $2^{-2} = \frac{1}{4}$; $g(1) = 0$ porque $2^0 = 1$; $g(8) = 3$ porque $2^3 = 8$. Son los valores del apartado a) con los papeles cambiados.
c. f: dominio $\mathbb{R}$, recorrido $(0, +\infty)$ y asíntota horizontal $y = 0$. g: dominio $(0, +\infty)$, recorrido $\mathbb{R}$ y asíntota vertical $x = 0$. El dominio de una es el recorrido de la otra, y sus gráficas son simétricas respecto de $y = x$.
d. $g(f(5)) = \log_2 2^5 = 5$ y $f(g(7)) = 2^{\log_2 7} = 7$, por la propia definición de logaritmo: cada función deshace lo que hace la otra.

Solución del ejercicio 7

a. Se desplaza 2 unidades a la derecha y 1 hacia arriba. Vértice $(2, 1)$; recorrido $[1, +\infty)$.
b. Se refleja respecto del eje OX y se sube 3. Vértice $(0, 3)$; recorrido $(-\infty, 3]$.
c. Se desplaza 1 a la izquierda y 3 hacia abajo. Vértice $(-1, -3)$; recorrido $[-3, +\infty)$.
d. Se estira verticalmente multiplicando las imágenes por 2. Vértice $(0, 0)$; recorrido $[0, +\infty)$ y pendientes ± 2.

Solución del ejercicio 8

a. Sustituimos x por $-x$: $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$. Es par, porque solo tiene potencias pares; su gráfica es simétrica respecto del eje OY.
b. $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$. Es impar: solo tiene potencias impares y su gráfica es simétrica respecto del origen.
c. $h(-x) = x^2 - x$, que no coincide con $h(x)$ ni con $-h(x)$. No es par ni impar; basta un contraejemplo: $h(1) = 2$ y $h(-1) = 0$.
d. $k(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{-x^3}{x^2 + 1} = -k(x)$: es impar (cociente de una función impar entre una par).

Solución del ejercicio 9

a. En $f \circ g$ se aplica primero g y al resultado se le aplica f: $(f \circ g)(x) = f(x^2) = 2x^2 + 1$. En $g \circ f$ es al revés: $(g \circ f)(x) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.
b. Sustituimos $x = 2$: $(f \circ g)(2) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ y $(g \circ f)(2) = 5^2 = 25$.
c. No es conmutativa: en general $f \circ g \neq g \circ f$. Basta un contraejemplo, como el del apartado b), donde se obtiene $9 \neq 25$.
d. $(h \circ f)(x) = h(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}$. La raíz exige $2x + 1 \geq 0$, es decir, $x \geq -\frac{1}{2}$: el dominio es $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Solución del ejercicio 10

a. Despejamos x: $y = \frac{3x-2}{5}$, luego $5y = 3x - 2$ y $x = \frac{5y+2}{3}$. Intercambiando los nombres, $f^{-1}(x) = \dfrac{5x + 2}{3}$. Comprobación:
$f\left(\frac{5x+2}{3}\right) = \dfrac{3 \cdot \frac{5x+2}{3} - 2}{5} = \dfrac{5x + 2 - 2}{5} = x$.
b. $y = x^3 + 1$, luego $x^3 = y - 1$ y $x = \sqrt[3]{y - 1}$. Por tanto, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$; existe en todo $\mathbb{R}$ porque la raíz cúbica está definida para cualquier número.
c. En todo $\mathbb{R}$ no tiene inversa, porque no es inyectiva: dos valores distintos dan la misma imagen, $h(2) = h(-2) = 4$. Restringida a $[0, +\infty)$ sí es inyectiva, y su inversa es $\sqrt{x}$.

Solución del ejercicio 11

a. $f(x) = 3{,}5 + 1{,}1x$ si $0 \leq x \leq 10$; $f(x) = 14{,}5 + 0{,}9(x - 10)$ si $x > 10$ (porque $f(10) = 3{,}5 + 11 = 14{,}5$).
b. $f(4) = 3{,}5 + 4{,}4 = 7{,}9$ €. $f(25) = 14{,}5 + 0{,}9 \cdot 15 = 28$ €.

c. Por la izquierda, $3{,}5 + 1{,}1 \cdot 10 = 14{,}5$; por la derecha, $14{,}5 + 0 = 14{,}5$. Coinciden con $f(10)$: es continua.
d. Como $19 > 14{,}5$, el trayecto supera 10 km: $14{,}5 + 0{,}9(x - 10) = 19 \Rightarrow x - 10 = 5 \Rightarrow x = 15$ km.

Solución del ejercicio 12

a. $P(t) = 0$ si $0 \le t \le 30$; $P(t) = 0{,}04(t - 30)$ si 30; $P(t) = 3{,}6 + 0{,}02(t - 120)$ si 120; $P(t) = 8$ si $t \ge 340$.
b. $P(20) = 0$; $P(90) = 0{,}04 \cdot 60 = 2{,}40$ €; $P(200) = 3{,}6 + 0{,}02 \cdot 80 = 5{,}20$ €; $P(500) = 8$ € (tope diario).
c. Como $5 > 3{,}6$, está en el tercer tramo: $3{,}6 + 0{,}02(t - 120) = 5 \Rightarrow t - 120 = 70 \Rightarrow t = 190$ min.
d. $3{,}6 + 0{,}02(t - 120) = 8 \Rightarrow t - 120 = 220 \Rightarrow t = 340$ min, es decir, 5 h 40 min.

Solución del ejercicio 13

a. Cada coste es una función afín: parte fija más precio por GB. $A(x) = 8 + 3x$ y $B(x) = 20 + x$.
b. Con $x = 4$: $A = 8 + 12 = 20$ € y $B = 20 + 4 = 24$ €. Con $x = 10$: $A = 8 + 30 = 38$ € y $B = 20 + 10 = 30$ €.
c. Igualamos: $8 + 3x = 20 + x$, luego $2x = 12$ y $x = 6$ GB. El coste común es $8 + 18 = 26$ €; gráficamente, es el punto de corte de las dos rectas.
d. Para x conviene A, porque tiene menos cuota fija. Para $x > 6$ conviene B, porque cada GB cuesta menos. Con $x = 6$ da igual.

Solución del ejercicio 14

a. $h(0) = 2$ m.
b. $x_v = -\dfrac{0{,}8}{2 \cdot (-0{,}1)} = 4$ m y $h(4) = -1{,}6 + 3{,}2 + 2 = 3{,}6$ m.
c. $-0{,}1x^2 + 0{,}8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow x = 10$ o $x = -2$. Cae a los 10 m.
d. $-0{,}1x^2 + 0{,}8x + 2 = 3{,}05 \Rightarrow x^2 - 8x + 10{,}5 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{5{,}5}$, es decir, $1{,}66$ m y $6{,}34$ m. La canasta es la segunda, cuando el balón baja: $6{,}34$ m.

Solución del ejercicio 15

a. $C(0) = 5\,000$ €; $C(5) = 5\,000 \cdot 1{,}03^5 \approx 5\,796{,}37$ €; $C(10) \approx 6\,719{,}58$ €.
b. El capital se multiplica por un mismo factor en cada periodo (crece un $3\ \%$ de lo que hay), en vez de sumar una cantidad fija. Los aumentos anuales son cada vez mayores.

c. $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}03} \approx \dfrac{0{,}6931}{0{,}02956} \approx 23{,}45$ años.

d. $t(C) = \dfrac{\ln(C/5\,000)}{\ln 1{,}03}$. Para $C = 7\,000$: $t = \dfrac{\ln 1{,}4}{\ln 1{,}03} \approx \dfrac{0{,}3365}{0{,}02956} \approx 11{,}4$ años.

Solución del ejercicio 16

a. $M(50) = \dfrac{900}{50} = 18$ €; $M(100) = \dfrac{1\,300}{100} = 13$ €; $M(500) = \dfrac{4\,500}{500} = 9$ €.

b. $M(x) = 8 + \dfrac{500}{x} \to 8$ cuando $x \to \infty$. La asíntota $y = 8$ indica que, con muchísimas unidades, el coste medio tiende a los 8 € variables, porque los costes fijos se reparten.

c. $\dfrac{500 + 8x}{x} \leq 10 \Rightarrow 500 + 8x \leq 10x \Rightarrow x \geq 250$ camisetas.

d. No se puede fabricar un número negativo ni dividir entre cero. Cuando $x \to 0^+$, $M \to +\infty$: con pocas camisetas, los costes fijos pesan muchísimo en cada unidad.

Solución del ejercicio 17

a. A: $100,\ 160,\ 220,\ 280,\ 340$. B: $50,\ 70,\ 130,\ 230,\ 370$. C: $40,\ 90,\ 202{,}5,\ 455{,}6,\ 1\,025{,}2$.

b. En $t = 4$: $C = 202{,}5$. En $t = 5$: $C = 303{,}75 > 250 = A$. Supera a A a partir del mes 5.

c. $5t^2 + 50 > 100 + 30t \Rightarrow t^2 - 6t - 10 > 0 \Rightarrow t > 3 + \sqrt{19} \approx 7{,}36$. Para $t = 7$ es 295 y para $t = 8$ es $370 > 340$: a partir del mes 8.

d. El exponencial: tarde o temprano supera a cualquier función lineal o cuadrática, porque se multiplica por 1,5 cada mes mientras que los otros crecen de forma más lenta.

Solución del ejercicio 18

a. Se desplaza 1 a la izquierda ($(x+1)^2$), se estira por 2 y se refleja respecto del eje OX ($-2(x+1)^2$) y se sube 3 unidades.

b. Vértice $(-1, 3)$; eje $x = -1$; recorrido $(-\infty, 3]$ con máximo 3.

c. Eje OY: $g(0) = -2 + 3 = 1$, punto $(0, 1)$. Eje OX: $(x+1)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{1{,}5}$, es decir, $x \approx 0{,}22$ y $x \approx -2{,}22$.

d. $g(x) = -2(x^2 + 2x + 1) + 3 = -2x^2 - 4x + 1$. Entonces $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1$. Coincide.

Solución del ejercicio 19

a. $r(3) = 6$ m y $A = \pi \cdot 36 \approx 113{,}1$ m^2.

b. $(A \circ r)(t) = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2$.

c. $4\pi t^2 = 100 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{100}{4\pi}} = \dfrac{5}{\sqrt{\pi}} \approx 2{,}82$ s. La inversa es $t = \sqrt{\dfrac{A}{4\pi}}$.

d. A los 6 s: $4\pi \cdot 36$; a los 3 s: $4\pi \cdot 9$. El cociente es 4. Al duplicar el tiempo se duplica el radio y el área se multiplica por $2^2 = 4$.

Solución del ejercicio 20

a. $y = \dfrac{x+3}{x-1} \Rightarrow yx - y = x + 3 \Rightarrow x(y-1) = y + 3 \Rightarrow x = \dfrac{y+3}{y-1}$. Luego $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-1} = f(x)$.

b. $f(f(x)) = \dfrac{\frac{x+3}{x-1} + 3}{\frac{x+3}{x-1} - 1} = \dfrac{(x+3) + 3(x-1)}{(x+3) - (x-1)} = \dfrac{4x}{4} = x$. Su gráfica es simétrica respecto de la recta $y = x$ (porque coincide con su simétrica).

c. De $y = \dfrac{x+b}{x-1}$: $yx - y = x + b \Rightarrow x(y-1) = y + b \Rightarrow x = \dfrac{y+b}{y-1}$. La inversa es $\dfrac{x+b}{x-1} = f(x)$ para cualquier b. Por ejemplo, con $b = 3$ se obtiene la función del apartado a).