Soluciones del examen - Estadística bidimensional

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (3 puntos)

a. Totales por filas: $8,\ 12,\ 10$. Totales por columnas: $12,\ 18$. Suma 30. La marginal de X es: 0 consolas, 8 alumnos; 1 consola, 12; 2 consolas, 10. La de Y: 1 hora, $6+4+2=12$ alumnos; 2 horas, $2+8+8=18$.

b. $\bar{x}=\dfrac{0\cdot 8+1\cdot 12+2\cdot 10}{30}=\dfrac{32}{30}\approx 1{,}07$. $\bar{y}=\dfrac{1\cdot 12+2\cdot 18}{30}=\dfrac{48}{30}=1{,}6$. Por término medio hay algo más de una consola por alumno y se juega 1,6 horas el fin de semana.

c. Con $X=2$ hay 10 alumnos y 8 juegan 2 horas: $\dfrac{8}{10}=0{,}8$, el $80\ \%$. En el total, la proporción que juega 2 horas es $\frac{18}{30}=0{,}6$; entre quienes tienen dos consolas es mayor, lo que sugiere relación entre las variables.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $\bar{x}=\dfrac{20}{5}=4$ y $\bar{y}=\dfrac{25}{5}=5$. Sumamos: $1+2+4+5+8=20$ y $2+3+5+7+8=25$.

b. $\sigma_x^2=\dfrac{110}{5}-16=6$, $\sigma_y^2=\dfrac{151}{5}-25=5{,}2$ y $\sigma_{xy}=\dfrac{127}{5}-20=5{,}4$. Se usan $\sum x^2=1+4+16+25+64=110$, $\sum y^2=4+9+25+49+64=151$ y $\sum xy=2+6+20+35+64=127$, con $\sigma_x^2=\dfrac{\sum x^2}{n}-\bar{x}^2$ y $\sigma_{xy}=\dfrac{\sum xy}{n}-\bar{x}\bar{y}$. Las tres medidas son positivas; la covarianza positiva anticipa una relación creciente.

c. $r=\dfrac{5{,}4}{\sqrt{6}\sqrt{5{,}2}}\approx 0{,}967$. Correlación positiva y muy fuerte: los puntos están casi sobre una recta creciente. El denominador vale $\sqrt{31{,}2}\approx 5{,}586$. Como r está muy próximo a 1, tiene sentido ajustar una recta de regresión.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $b_{yx}=\dfrac{5{,}4}{6}=0{,}9$ y $y-5=0{,}9(x-4)$, es decir, $y=0{,}9x+1{,}4$. La recta pasa siempre por el centro de gravedad $(\bar{x},\bar{y})=(4,5)$ y su pendiente es $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$.

b. $x=6$: $y=5{,}4+1{,}4=6{,}8$; $x=20$: $y=19{,}4$. Solo es fiable la primera, porque 6 está dentro del rango de x (1 a 8); 20 queda muy fuera. Estimar en 20 es

extrapolar: nada garantiza que la tendencia lineal se mantenga tan lejos de los datos.

c. $b_{xy} = \dfrac{5{,}4}{5{,}2} \approx 1{,}038$. Comprobación: $b_{yx} \cdot b_{xy} = 0{,}9 \cdot 1{,}038 \approx 0{,}935$, que coincide con $r^2 = \frac{5{,}4^2}{6 \cdot 5{,}2} \approx 0{,}935$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $\sigma_{xy} = -0{,}8 \cdot 3 \cdot 10 = -24$. Se despeja de $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$. El signo negativo indica una relación decreciente.

b. $b_{yx} = \dfrac{-24}{9} = -\dfrac{8}{3}$ y $y - 20 = -\dfrac{8}{3}(x - 6)$, es decir, $y = -\dfrac{8}{3}x + 36$.
$b_{xy} = \dfrac{-24}{100} = -0{,}24$ y $x = -0{,}24y + 10{,}8$. Las dos rectas pasan por $(\bar{x}, \bar{y})$. Para la de Y sobre X la pendiente es $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ y para la de X sobre Y, $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$; la segunda se obtiene de $x - 6 = -0{,}24(y - 20)$.

c. Se cortan en $(\bar{x}, \bar{y}) = (6, 20)$. Además $\left(-\dfrac{8}{3}\right)(-0{,}24) = 0{,}64 = (-0{,}8)^2$.
Comprobación: $y = -\frac{8}{3} \cdot 6 + 36 = 20$ y $x = -0{,}24 \cdot 20 + 10{,}8 = 6$. Como $|r| = 0{,}8$, la relación lineal es fuerte e inversa.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $\bar{x} = 71{,}67$, $\bar{y} = 144{,}17$, $\sigma_x^2 = 538{,}89$, $\sigma_y^2 = 1\,411{,}81$, $\sigma_{xy} = 851{,}39$ y $r = \dfrac{851{,}39}{23{,}21 \cdot 37{,}57} \approx 0{,}976$.

b. $b_{yx} = \dfrac{851{,}39}{538{,}89} \approx 1{,}580$ y $y \approx 1{,}580x + 30{,}94$. La ordenada en el origen es $a = \bar{y} - b\,\bar{x}$, calculada con la pendiente sin redondear.

c. $y(100) \approx 158{,}0 + 30{,}94 \approx 188{,}9$ miles de euros, unos 189 000 €.

d. $y(30) \approx 47{,}4 + 30{,}94 \approx 78{,}3$ miles de euros. La de 100 m^2 está dentro del rango (40 a 110 m^2) y es fiable. La de 30 m^2 queda fuera del rango: es una extrapolación poco fiable, aunque r sea alto.