Soluciones del examen - Derivadas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (3 puntos)

a. Regla del producto con $u = x^2$ y $v = e^x$: $f' = 2x\,e^x + x^2 e^x$. Sacando factor común, $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$. Comprobación: $f'(0) = 0$, lo que concuerda con que $f(x) = x^2 e^x \geq 0$ tiene un mínimo en $x = 0$.

b. Regla del cociente con $u = 2x + 1$ y $v = x^2 + 1$: $g' = \dfrac{2(x^2+1) - (2x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2}$. Sacando factor común -2, $g'(x) = \dfrac{-2(x^2 + x - 1)}{(x^2+1)^2}$; el denominador nunca se anula, así que g es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c. Regla de la cadena: la exterior es la raíz y la interior $x^2 + 4$, con derivada $2x$. Así $h' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. El resultado tiene el mismo signo que x: h decrece para $x < 0$ y crece para $x > 0$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $f(2+h) - f(2) = (4 + 4h + h^2 + 6 + 3h) - 10 = 7h + h^2$. El cociente vale $7 + h$, que tiende a 7. Luego $f'(2) = 7$. Se aplica $f'(2) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$, con $f(2) = 4 + 6 = 10$. Al dividir $7h + h^2$ entre h desaparece la indeterminación $\frac{0}{0}$. Comprobación con las reglas: $f'(x) = 2x + 3$ y $f'(2) = 7$.

b. Continuidad: $g(2) = 4$ y $2a - 4 = 4 \Rightarrow a = 4$ (1,25 puntos). Derivadas: por la izquierda $2x = 4$ y por la derecha $a = 4$. Coinciden, de modo que con $a = 4$ es continua y derivable (1,25 puntos). Primero se impone la continuidad, porque sin ella no puede haber derivabilidad. Con $a = 4$ la gráfica enlaza la parábola con su recta tangente $y = 4x - 4$ en el punto $(2, 4)$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Derivamos cada sumando: $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$. Para $x = 1$: $f(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$, así que el punto es $(1, 1)$, y la pendiente es $f'(1) = 1 + 2 = 3$.

b. La tangente pasa por $(1, 1)$ con pendiente 3: $y - 1 = 3(x - 1)$, es decir, $y = 3x - 2$. Comprobación: $3 \cdot 1 - 2 = 1$, así que la recta pasa por el punto.

c. La normal es perpendicular a la tangente, con pendiente $-\frac{1}{3}$: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$, es decir, $y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}$. Comprobación: el producto de las pendientes es

$3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$, que se anula en $x = -2$ y $x = 2$. Estudiando el signo: es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, donde f crece, y negativa en $(-2, 2)$, donde decrece.
b. En $x = -2$ pasa de crecer a decrecer: máximo relativo en $(-2, 21)$, ya que $f(-2) = -8 + 24 + 5 = 21$. En $x = 2$ pasa de decrecer a crecer: mínimo relativo en $(2, -11)$, ya que $f(2) = 8 - 24 + 5 = -11$.
c. $f''(x) = 6x$: negativa si $x < 0$ (cóncava hacia abajo) y positiva si $x > 0$ (hacia arriba). Cambia de signo en $x = 0$, con $f(0) = 5$: punto de inflexión $(0, 5)$.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $B(x) = (x - 10)(500 - 10x) = -10x^2 + 600x - 5\,000$. Tiene sentido para $10 \leq x \leq 50$. Beneficio = (precio de venta − coste) × pares vendidos. El precio no puede bajar de 10 € (habría pérdidas en cada par) ni superar 50 € (no se vendería ninguno).
b. $B'(x) = -20x + 600 = 0 \Rightarrow x = 30$ €. Es máximo porque $B'' = -20 < 0$. Se deriva, se iguala a cero y se confirma con el signo de la segunda derivada.
c. $B(30) = 20 \cdot 200 = 4\,000$ € y se venden $500 - 300 = 200$ pares. Comprobación con la fórmula desarrollada: $B(30) = -9\,000 + 18\,000 - 5\,000 = 4\,000$ €.
d. Con coste 20 €: $B = (x - 20)(500 - 10x)$ y $B' = 500 - 10x - 10(x - 20) = 700 - 20x = 0$, de donde $x = 35$ €. Sí cambia: sube 5 €. Con ese coste se venderían $500 - 350 = 150$ pares y el beneficio máximo sería $15 \cdot 150 = 2\,250$ €.