# Apuntes - Derivadas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

En este tema aprenderás: tasa de variación y derivada, reglas de derivación, recta tangente y normal y crecimiento, extremos y optimización. Cada idea va en un cuadro de color, con ejemplos resueltos paso a paso.

### Actividad de introducción: la velocidad del ciclista

En la Vuelta a España, un ciclista sube un puerto y su equipo registra la distancia recorrida desde las 10:00 de la mañana: $s(t) = 20t + 6t^2$ kilómetros, con $t$ en horas. ¿Cuál es su velocidad exacta a las 10:30? La velocidad media entre las 10:30 y las 11:30 (una hora) es de 32 km/h, pero eso mezcla un trozo lento con otro más rápido. Reduciendo el intervalo, las velocidades medias se acercan a un valor concreto.

| Duración del intervalo (h), desde las 10:30 | 1 | 0,5 | 0,1 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|
| Velocidad media (km/h) | 32 | 29 | 26,6 | 26,06 |

El cociente vale $26 + 6h$, que tiende a 26 cuando $h \to 0$. Esa velocidad instantánea, 26 km/h, es la derivada $s'(0{,}5)$. En este tema convertirás esta idea en una herramienta general para calcular pendientes de curvas, velocidades de cambio y valores óptimos.

## Tasa de variación y derivada

### Definición: tasa de variación media

La **tasa de variación media** de $f$ en $[a, b]$ es $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (la pendiente de la recta secante). La **derivada** de $f$ en $a$ es el límite de la tasa media cuando el intervalo se hace infinitamente pequeño:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Mide la **tasa de variación instantánea** y es la **pendiente de la recta tangente** en $x = a$. Para $f(x) = x^2$ en $a = 2$: $\frac{(2+h)^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = 4 + h \to 4$. Si el límite existe, $f$ es **derivable** en $a$; toda función derivable es continua, pero no al revés ($|x|$ no es derivable en 0).

## Reglas de derivación

| Función | Derivada |
|---|---|
| $k$ (constante) | $0$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ |

| | |
|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $e^x$, $a^x$ | $e^x$, $a^x \ln a$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$ | $\cos x$, $-\operatorname{sen} x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$ |

**Propiedad**

Operaciones: $(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(kf)' = kf'$; **producto** $(fg)' = f'g + fg'$; **cociente** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; **regla de la cadena** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

**Ejemplo 1**

$\left(5x^3 - 4x^2 + 7x - 2\right)' = 15x^2 - 8x + 7$.

Con el producto: $\left[(x^2+1)(x-3)\right]' = 2x(x-3) + (x^2+1) = 3x^2 - 6x + 1$. Con el cociente: $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Con la cadena: $\left[(3x-2)^5\right]' = 5(3x-2)^4 \cdot 3 = 15(3x-2)^4$ y $\left[\ln(x^2+1)\right]' = \frac{2x}{x^2+1}$.

**Ejemplo 2: derivada de un cociente**

**Deriva** $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

Con la regla del cociente, $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$.

## Recta tangente y normal

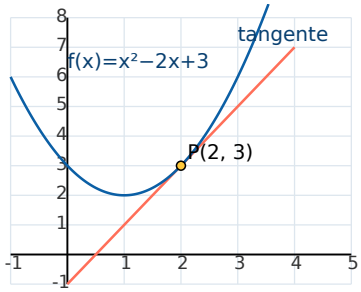
**Definición: normal**

La tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. La **normal** es perpendicular a ella: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$.

**Ejemplo 3**

**Para** $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **en** $x = 2$**:** $f(2) = 3$, $f'(x) = 2x - 2$, $f'(2) = 2$.

Tangente: $y - 3 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 1$.




**Cómo se hace: hallar la recta tangente a una curva en un punto**

1. Calcula la ordenada $f(a)$ para tener el punto $(a, f(a))$.
2. Deriva $f$ y calcula la pendiente $m = f'(a)$.
3. Escribe $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
4. Para la normal, usa la pendiente $-\frac{1}{f'(a)}$ (si $f'(a) \neq 0$).

## Crecimiento, extremos y optimización

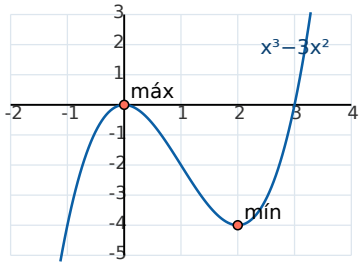
**Propiedad**

Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, $f$ es **creciente**; si $f'(x)$, es **decreciente**. Los **extremos relativos** están en puntos con $f'(x) = 0$ (puntos críticos): máximo si $f'$ pasa de $+$ a $-$, mínimo si pasa de $-$ a $+$.

**Ejemplo 4**

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Es positiva si $x$ o $x > 2$ (creciente) y negativa en $(0, 2)$ (decreciente). Máximo en $(0, 0)$ y mínimo en $(2, -4)$.




**Definición: optimización**

Un problema de **optimización** se resuelve (1) escribiendo la magnitud a optimizar como función de una variable, (2) derivando e igualando a 0 y (3) comprobando que es máximo o mínimo. Con 100 m de valla, un rectángulo junto a un muro (tres lados) tiene área $A(x) = x(100 - 2x)$; $A'(x) = 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25$ y $A = 25 \cdot 50 = 1250$ m$^2$.

**Regla**

En física, si $s(t)$ es la posición, la velocidad es $v = s'(t)$ y la aceleración $a = v'(t) = s''(t)$.

**Cómo se hace: estudiar el crecimiento y los extremos**

1. Calcula $f'(x)$ y resuelve $f'(x) = 0$ (puntos críticos).
2. Estudia el signo de $f'$ en los intervalos que determinan los puntos críticos y los puntos fuera del dominio.
3. Si $f'$ pasa de $+$ a $-$, hay un máximo; de $-$ a $+$, un mínimo.
4. Calcula las ordenadas de los extremos y escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

**Ejemplo 5: rectángulo de área máxima**

**Un rectángulo tiene perímetro 40 m. ¿Qué dimensiones dan el área máxima?**

Si un lado mide $x$, el otro mide $20 - x$ y $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$. Entonces $A'(x) = 20 - 2x = 0$ da $x = 10$, y $A'' = -2$ confirma que es un máximo. Es un cuadrado de $10 \times 10$ m, con $A = 100$ m$^2$.

**¡Atención! Errores frecuentes**

- Derivar el producto como $f'g'$, o el cociente como $\frac{f'}{g'}$.
- Olvidar el factor $g'(x)$ de la regla de la cadena.
- Pensar que $f'(a) = 0$ siempre indica máximo o mínimo (en $x^3$ en 0 no lo hay).
- Escribir la tangente sin calcular antes $f(a)$.

## Interpretaciones de la derivada

**Propiedad: significado de la derivada en cada contexto**

La derivada $f'(a)$ siempre mide lo mismo: cuánto cambia $f$ por cada unidad que cambia $x$, justo en $x = a$. Sus unidades son **unidades de $f$ entre unidades de $x$**. Si $s$ son kilómetros y $t$ horas, $s'$ se mide en km/h y es la velocidad; si $C$ son euros y $x$ kilogramos, $C'$ se mide en €/kg y es el coste marginal; si $P$ es una población y $t$ el tiempo, $P'$ es la velocidad de crecimiento. Cuando $f'(a) > 0$ la magnitud aumenta, y cuando $f'(a)$ disminuye.

**Cómo se hace: interpretar una derivada en un problema**

1. Escribe qué magnitud representa $f$ y cuál representa $x$, con sus unidades.
2. Calcula $f'(x)$ y sustituye el valor pedido.

3. Escribe el resultado con sus unidades y con una frase: «en ese instante, la magnitud aumenta (o disminuye) a razón de…».
4. Comprueba que la cifra es razonable comparándola con una tasa media cercana.

**Ejemplo 6**

**Un depósito de agua se vacía y su volumen en litros es $V(t) = 2\,000 - 50t - t^2$, con $t$ en minutos. Interpreta $V'(10)$.**

Primero $V'(t) = -50 - 2t$ y entonces $V'(10) = -70$. El signo negativo indica que el volumen disminuye, y el valor que en ese instante salen unos 70 litros por minuto. La tasa media entre $t = 10$ y $t = 11$ es $V(11) - V(10) = 1\,329 - 1\,400 = -71$ l/min, muy parecida: la comprobación confirma el cálculo.

## Derivadas laterales y puntos angulosos

**Definición: derivadas laterales**

La **derivada por la izquierda** $f'(a^-)$ es el límite del cociente incremental cuando $h \to 0^-$, y la **derivada por la derecha** $f'(a^+)$ es el mismo límite cuando $h \to 0^+$. Una función es derivable en $a$ si es continua en $a$ y las dos derivadas laterales existen y coinciden. Si son distintas, la gráfica tiene un **punto anguloso** (una esquina) y no hay recta tangente única.

**Ejemplo 7**

**Estudia la derivabilidad de $f(x) = |x - 1|$ en $x = 1$.**

A la izquierda, $f(x) = 1 - x$ y su derivada vale $-1$. A la derecha, $f(x) = x - 1$ y su derivada vale $1$. Como $f'(1^-) = -1 \neq 1 = f'(1^+)$, la función es continua pero no derivable en $x = 1$: su gráfica tiene una esquina con forma de V.

**¡Atención! derivable implica continua, pero no al revés**

Una función derivable en un punto siempre es continua en él. Lo contrario es falso: $|x|$ es continua en 0 y no es derivable. Antes de comprobar la derivabilidad de una función definida a trozos, comprueba siempre primero la continuidad; si no es continua en el punto, no puede ser derivable y no hace falta calcular nada más.

## Curvatura y puntos de inflexión

**Definición: curvatura e inflexión**

La derivada de $f'$ se llama **segunda derivada** $f''$. Mide cómo cambia la pendiente. Si $f''(x) > 0$ en un intervalo, la pendiente aumenta y la gráfica se curva hacia arriba (forma de copa abierta); si $f''(x)$, la gráfica se curva hacia abajo. Un **punto de**

**inflexión** es un punto donde la curvatura cambia de sentido; en él $f'' = 0$ (y la curvatura cambia de signo).

**Regla: criterio de la segunda derivada**

Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, hay un **mínimo relativo** en $a$. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a)$, hay un **máximo relativo**. Si $f''(a) = 0$, el criterio no decide y hay que volver a la tabla de signos de $f'$.

**Ejemplo 8**

**Estudia la curvatura de $f(x) = x^4 - 6x^2$.**

Tenemos $f'(x) = 4x^3 - 12x$ y $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$. La segunda derivada es positiva si $x$ o $x > 1$ y negativa en $(-1, 1)$. La gráfica se curva hacia arriba fuera de $[-1, 1]$ y hacia abajo dentro. Hay dos puntos de inflexión, $(-1, -5)$ y $(1, -5)$.

## Problemas de optimización

**Cómo se hace: resolver un problema de optimización**

1. Lee el problema y dibuja la situación; nombra las variables con letras y unidades.
2. Escribe la magnitud que se quiere maximizar o minimizar (área, volumen, coste, beneficio).
3. Usa la condición del enunciado para dejarla en función de una sola variable y fija el dominio.
4. Deriva, iguala a cero y resuelve; descarta las soluciones fuera del dominio.
5. Comprueba que es máximo o mínimo con $f''$ o con la tabla de signos, y compara con los extremos del dominio si estos pertenecen a él.
6. Responde con una frase completa que incluya todas las magnitudes pedidas.

**Ejemplo 9**

**Con una cuerda de 40 m se forma un rectángulo. ¿Qué dimensiones dan el área máxima?**

Si un lado mide $x$, el otro mide $20 - x$, porque el perímetro es 40. El área es $A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$ con $0$. Derivamos: $A'(x) = 20 - 2x = 0$ y entonces $x = 10$. Como $A'' = -2$ es un máximo. El rectángulo es un cuadrado de 10 m de lado y su área es de 100 $m^2$.

**¿Sabías que? Un invento de dos genios**

El cálculo diferencial fue desarrollado de forma independiente por Isaac Newton y por Gottfried Leibniz en el siglo XVII. Newton lo pensó para estudiar el movimiento de los

planetas y llamó «fluxiones» a las velocidades de cambio. Leibniz creó la notación $\frac{dy}{dx}$ que todavía usamos. Mucho antes, Pierre de Fermat ya buscaba máximos y mínimos con ideas muy parecidas. Hoy, las derivadas están en el diseño de coches, en la economía y en los algoritmos que aprenden de los datos.

**El consejo de Otto**

En una cadena de funciones, deriva de fuera hacia dentro: primero la exterior (dejando el interior igual) y multiplica por la derivada del interior.