Ejercicios - Derivadas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Tasa de variación media

La tabla recoge los kilómetros recorridos por un ciclista aficionado durante una salida por la sierra de Guadarrama.

Tiempo (h)	0	1	2	3
Distancia (km)	0	18	41	66

a. Calcula la tasa de variación media de la distancia entre las 0 h y las 1 h, y entre la 1 h y las 3 h.
b. Explica qué significa cada resultado en este contexto, con sus unidades.
c. ¿En qué tramo ha ido más deprisa de media? ¿Puedes saber su velocidad exacta a las 2 h con estos datos?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Derivada por la definición

Sea $f(x) = 3x^2 - x$. Vamos a calcular su derivada en $x = 1$ sin usar ninguna regla, solo con el límite que la define.

a. Calcula $f(1)$ y $f(1+h)$ y simplifica $f(1+h) - f(1)$.
b. Escribe el cociente $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ y simplifícalo.
c. Calcula el límite cuando $h \to 0$ y da el valor de $f'(1)$.
d. Comprueba el resultado con las reglas de derivación.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Derivadas inmediatas

Deriva cada función aplicando la tabla de derivadas y las reglas de la suma y del producto por un número. Recuerda escribir las raíces y los cocientes como potencias cuando convenga.

a. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x - 2$
b. $g(x) = \sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$
c. $h(x) = e^x - 4\ln x$
d. $k(x) = 2\,\operatorname{sen} x + \cos x$

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Producto y cociente

Deriva aplicando la regla del producto $(fg)' = f'g + fg'$ o la del cociente $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. Simplifica el resultado.

a. $f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$
b. $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$
c. $h(x) = x\,e^x$
d. $k(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Regla de la cadena

Identifica la función exterior y la interior y aplica la regla de la cadena $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

a. $f(x) = (3x - 2)^5$
b. $g(x) = \ln(x^2 + 1)$
c. $h(x) = \sqrt{4x + 1}$
d. $k(x) = e^{-x^2}$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Tangente y normal

Sea $f(x) = x^3 - 3x + 1$ y el punto de abscisa $x = 2$ de su gráfica.

a. Calcula el punto de la gráfica y la pendiente de la tangente.
b. Escribe la ecuación de la recta tangente.
c. Escribe la ecuación de la recta normal.
d. ¿En qué puntos de la gráfica la tangente es horizontal?

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La etapa de montaña

En una etapa de la Vuelta a España, la distancia recorrida por un ciclista en el tramo de subida de un puerto viene dada por $s(t) = -t^3 + 9t^2$ kilómetros, donde t es el tiempo en horas desde el inicio del tramo, con $0 \le t \le 4$. Un técnico del equipo quiere analizar su ritmo.

a. Calcula la distancia recorrida en las cuatro horas y la velocidad media del tramo.
b. Halla la velocidad instantánea $v(t) = s'(t)$ y calcula $v(2)$ y $v(4)$.

c. ¿En qué instante es máxima la velocidad y cuánto vale? Ayuda: es el máximo de $v(t)$.
d. Calcula la aceleración $a(t) = v'(t)$ e interpreta su signo para $t = 2$ y para $t = 4$.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Coste marginal en el obrador

Un obrador de turrón de Jijona fabrica x kilogramos de turrón blando al día. El coste diario de producción, en euros, es $C(x) = 0{,}02x^2 + 3x + 500$, donde 500 € son los costes fijos (alquiler y electricidad) y el resto depende de la cantidad fabricada.

a. Calcula el coste total de fabricar 100 kg y el coste medio por kilogramo.
b. Halla el coste marginal $C'(x)$ y calcula $C'(100)$.
c. Interpreta $C'(100)$: ¿qué mide aproximadamente? Compáralo con $C(101) - C(100)$.
d. ¿Para qué producción coincide el coste marginal con 11 €/kg?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Cultivo de bacterias

En el laboratorio de un instituto de Valencia se observa un cultivo de bacterias cuyo número, t horas después de empezar el experimento, es $P(t) = 1\,000\,e^{0{,}3t}$.

a. ¿Cuántas bacterias hay al empezar y al cabo de 2 horas? Redondea a las unidades.
b. Calcula la derivada $P'(t)$ y demuestra que $P'(t) = 0{,}3\,P(t)$.
c. Calcula la velocidad de crecimiento a las 2 horas, con sus unidades.
d. Explica con tus palabras qué significa que la velocidad de crecimiento sea proporcional a la población.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Tangente y normal al logaritmo

Consideramos la función $f(x) = \ln x$ y el punto de su gráfica con abscisa $x = e$.

a. Calcula el punto y la pendiente de la tangente.
b. Demuestra que la tangente pasa por el origen de coordenadas.
c. Halla la ecuación de la normal y su punto de corte con el eje OX.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Derivabilidad de una función a trozos

Determina los valores de a y b para que la función siguiente sea continua y derivable

en $x = 1$: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a. Impón la continuidad en $x = 1$ comparando los límites laterales con $f(1)$.
b. Calcula las derivadas laterales en $x = 1$ e imponlas iguales.
c. Resuelve el sistema y escribe la función obtenida.
d. Para $a = 3$ y $b = -1$ la función es continua, pero ¿es derivable en 1? Razona.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Monotonía y extremos

Estudia la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ siguiendo estos pasos.

a. Calcula $f'(x)$ y resuelve $f'(x) = 0$.
b. Dibuja la tabla de signos de f' e indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Halla los extremos relativos y sus coordenadas.
d. Calcula $f(0)$ y $f(4)$ y deduce el máximo y el mínimo absolutos en $[0, 4]$.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Curvatura e inflexión

Para la misma función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ estudia ahora su curvatura con la segunda derivada.

a. Calcula $f''(x)$.
b. Halla el intervalo donde la gráfica se curva hacia arriba ($f'' > 0$) y donde se curva hacia abajo (f'').
c. Calcula el punto de inflexión.
d. Comprueba con f'' que el punto $(1, 5)$ es máximo y que $(3, 1)$ es mínimo.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – El cercado de la finca

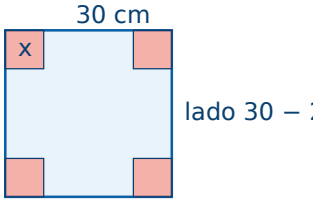
Un agricultor de Extremadura dispone de 240 m de malla para cercar un campo rectangular junto a un río. Por el lado del río no hace falta valla, de modo que solo se cercan tres lados: dos lados de longitud x (perpendiculares al río) y uno paralelo al río.

a. Expresa el lado paralelo al río en función de x y escribe el área $A(x)$.
b. ¿Entre qué valores puede variar x?
c. Calcula $A'(x)$ y halla el valor de x que hace máxima el área.
d. Da las dimensiones del campo y el área máxima. Comprueba que es un máximo.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – La caja de cartón

Para una feria de ciencias se construye una caja sin tapa a partir de una lámina cuadrada de cartón de 30 cm de lado. Se recorta un cuadrado de lado x en cada esquina y se doblan los lados hacia arriba.



a. Expresa el volumen $V(x)$ en función de x e indica entre qué valores puede variar x.
b. Calcula $V'(x)$ y resuelve $V'(x) = 0$. ¿Qué solución es válida?
c. Determina el valor de x que da el volumen máximo y calcula ese volumen.
d. Si el cartón cuesta 0,004 €/cm^2, ¿cuánto cuesta la lámina? ¿Cuánto cartón se desperdicia en las esquinas?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Lata de refresco de 330 ml

Una empresa de bebidas quiere fabricar latas cilíndricas de 330 cm^3 de capacidad gastando la menor cantidad posible de aluminio. Llamamos r al radio de la base y h a la altura, ambos en centímetros.

a. Escribe la relación entre r y h que impone el volumen y despeja h.
b. Escribe la superficie total $S(r)$ de la lata (dos tapas y la superficie lateral) en función solo de r.
c. Calcula r que minimiza la superficie. Da el resultado con dos decimales.
d. Calcula la altura correspondiente y la superficie mínima. ¿Qué relación hay entre h y r?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – El precio de las tartas

Una pastelería de Granada vende tartas de queso. Con la experiencia de los últimos meses, ha anotado cuántas tartas vende a la semana según el precio de cada una. Cada tarta le cuesta 10 € de ingredientes y de horno.

Precio p (€)	12	20	30	40
Tartas vendidas q	152	120	80	40

a. Observa la tabla y comprueba que la demanda sigue la recta $q = 200 - 4p$, donde p es el precio en euros y q el número de tartas semanales.

b. Escribe la función de ingresos $I(p) = p \cdot q$ y calcula el precio que los hace máximos.
c. Escribe la función beneficio $B(p) = (p - 10)\, q$ y halla el precio que maximiza el beneficio.
d. Compara ambos precios y explica por qué el pastelero no debe fijar el precio que da más ingresos.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Rectas tangentes a una parábola

Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 5$. Queremos estudiar varias de sus rectas tangentes y relacionarlas con otras rectas del plano.

a. Halla la recta tangente en $x = 1$ y sus puntos de corte con los ejes.
b. Calcula el área del triángulo que forman esa tangente y los ejes de coordenadas.
c. ¿En qué punto de la parábola la tangente es paralela a la recta $y = 2x - 1$? Escribe esa tangente.
d. ¿Existe algún punto con tangente perpendicular a $y = 2x - 1$? Razona.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – El cohete de agua

En la fiesta de fin de curso de un instituto de Sevilla, los alumnos lanzan cohetes de agua propulsados con aire. Un cohete se lanza verticalmente desde una altura de 1,5 m y, durante todo el vuelo, su altura en metros es $h(t) = 1{,}5 + 20t - 5t^2$, con t en segundos. Se desprecia el rozamiento.

a. Calcula la velocidad $v(t) = h'(t)$ y la velocidad inicial.
b. ¿En qué instante alcanza la altura máxima y cuál es esa altura?
c. ¿En qué instante toca el suelo? Resuelve $h(t) = 0$ y toma la solución positiva con dos decimales.
d. Calcula la velocidad al llegar al suelo, en m/s y en km/h. ¿Qué indica el signo?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: recuperar la función

Se sabe que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

a. Escribe las dos condiciones sobre f' y plantea un sistema para a y b.
b. Resuelve el sistema y escribe f.
c. Calcula los valores del máximo y del mínimo.
d. Demuestra que el punto de inflexión está justo en el punto medio de las abscisas de los dos extremos.