Soluciones - Derivadas

Curso: 1 Bachillerato Ciencias

Solución del ejercicio 1

a. Entre 0 y 1 h: $\dfrac{18-0}{1-0}=18$. Entre 1 y 3 h: $\dfrac{66-18}{3-1}=\dfrac{48}{2}=24$.

b. Son velocidades medias: 18 km/h en la primera hora y 24 km/h entre la 1 h y las 3 h. La tasa de variación media mide cuántos kilómetros se recorren, por término medio, en cada hora.

c. Ha ido más deprisa en el segundo tramo (24 km/h frente a 18 km/h). No podemos conocer la velocidad exacta a las 2 h: haría falta la derivada, es decir, el límite de las velocidades medias en intervalos cada vez más pequeños.

Solución del ejercicio 2

a. $f(1)=3-1=2$. Desarrollamos el cuadrado: $f(1+h)=3(1+h)^2-(1+h)=3+6h+3h^2-1-h=2+5h+3h^2$. Restando, $f(1+h)-f(1)=5h+3h^2$.

b. Dividimos entre h, sacando factor común: $\dfrac{5h+3h^2}{h}=\dfrac{h(5+3h)}{h}=5+3h$, válido para $h\neq 0$. Así desaparece la indeterminación $\frac{0}{0}$.

c. Cuando $h\to 0$, el término $3h$ se anula: $\lim_{h\to 0}(5+3h)=5$. Por tanto, $f'(1)=5$: la pendiente de la tangente en $x=1$ es 5.

d. Con las reglas, $f'(x)=6x-1$ y $f'(1)=6-1=5$. Coincide con el resultado obtenido por la definición.

Solución del ejercicio 3

a. Derivamos término a término con $(x^n)'=nx^{n-1}$: $f'(x)=15x^2-8x+7$. La constante -2 tiene derivada nula.

b. Escribimos las potencias: $g(x)=x^{1/2}+3x^{-1}$. Entonces $g'(x)=\dfrac{1}{2}x^{-1/2}-3x^{-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x^2}$, definida para $x>0$.

c. La exponencial e^x es su propia derivada y $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$: $h'(x)=e^x-\dfrac{4}{x}$.

d. Usamos $(\operatorname{sen} x)'=\cos x$ y $(\cos x)'=-\operatorname{sen} x$, y las constantes multiplicativas se mantienen: $k'(x)=2\cos x-\operatorname{sen} x$.

Solución del ejercicio 4

a. Regla del producto con $u = x^2 + 1$ y $v = x - 3$:
$f' = 2x(x-3) + (x^2+1)\cdot 1 = 2x^2 - 6x + x^2 + 1 = 3x^2 - 6x + 1$. Se comprueba desarrollando antes: $f = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

b. Regla del cociente: $g' = \dfrac{1\cdot(x-1) - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x - 1 - x - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Es siempre negativa: g decrece en cada intervalo de su dominio.

c. Regla del producto: $h' = 1\cdot e^x + x\,e^x = e^x(1+x)$, sacando factor común e^x.

d. Regla del cociente con $u = \ln x$ y $v = x$: $k' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, que se anula en $x = e$.

Solución del ejercicio 5

a. La función exterior es u^5 y la interior $u = 3x - 2$, con $u' = 3$. Derivamos la exterior en la interior y multiplicamos por la derivada de la interior:
$f' = 5(3x-2)^4 \cdot 3 = 15(3x-2)^4$.

b. Exterior $\ln u$ e interior $u = x^2 + 1$, con $u' = 2x$: $g' = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

c. Exterior $\sqrt{u}$, cuya derivada es $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, e interior $4x + 1$, con derivada 4:
$h' = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$.

d. Exterior e^u e interior $-x^2$, con derivada $-2x$: $k' = e^{-x^2}\cdot(-2x) = -2x\,e^{-x^2}$.

Solución del ejercicio 6

a. $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$, luego el punto es $(2, 3)$. Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, la pendiente es $f'(2) = 12 - 3 = 9$.

b. $y - 3 = 9(x - 2)$, es decir, $y = 9x - 15$.

c. La pendiente de la normal es $-\frac{1}{9}$: $y - 3 = -\frac{1}{9}(x-2)$, es decir, $y = -\dfrac{x}{9} + \dfrac{29}{9}$.

d. Se anula la derivada: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Los puntos son $(1, -1)$ y $(-1, 3)$.

Solución del ejercicio 7

a. $s(4) = -64 + 144 = 80$ km. La velocidad media es la distancia entre el tiempo: $\dfrac{80 - 0}{4} = 20$ km/h.

b. La velocidad instantánea es la derivada: $v(t) = -3t^2 + 18t$. Entonces

$v(2) = -12 + 36 = 24$ km/h y $v(4) = -48 + 72 = 24$ km/h: en esos dos instantes va igual de rápido.

c. Derivamos la velocidad: $v'(t) = -6t + 18 = 0$ da $t = 3$. Como $v'' = -6$, es un máximo: $v(3) = -27 + 54 = 27$ km/h a las 3 horas.

d. La aceleración es $a(t) = v'(t) = -6t + 18$. Para $t = 2$, $a = 6 > 0$: la velocidad aumenta, el ciclista acelera. Para $t = 4$, $a = -6$: la velocidad disminuye, frena. Coincide con que el máximo de velocidad está en $t = 3$.

Solución del ejercicio 8

a. $C(100) = 0{,}02 \cdot 10\,000 + 300 + 500 = 200 + 300 + 500 = 1\,000$ €. Coste medio: $1\,000 : 100 = 10$ €/kg.

b. $C'(x) = 0{,}04x + 3$, de modo que $C'(100) = 4 + 3 = 7$ €/kg.

c. Mide el coste aproximado de fabricar un kilogramo más cuando ya se producen 100. Exactamente, $C(101) - C(100) = 1\,007{,}02 - 1\,000 = 7{,}02$ €. La derivada (7 €) es una buena aproximación.

d. $0{,}04x + 3 = 11 \Rightarrow 0{,}04x = 8 \Rightarrow x = 200$ kg.

Solución del ejercicio 9

a. $P(0) = 1\,000$. $P(2) = 1\,000\,e^{0{,}6} \approx 1\,822$ bacterias.

b. Por la regla de la cadena, $P'(t) = 1\,000\,e^{0{,}3t} \cdot 0{,}3 = 0{,}3\,P(t)$.

c. $P'(2) = 0{,}3 \cdot 1\,822{,}1 \approx 546{,}6$ bacterias por hora.

d. Cuantas más bacterias hay, más rápido aumenta la población: cada hora crece aproximadamente un 30 % de lo que hay en ese instante. Es el rasgo típico del crecimiento exponencial.

Solución del ejercicio 10

a. $f(e) = \ln e = 1$, así que el punto es $(e, 1)$. Como $f'(x) = \frac{1}{x}$, la pendiente de la tangente es $f'(e) = \frac{1}{e}$.

b. La tangente es $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$, es decir, $y = \frac{x}{e} - 1 + 1 = \frac{x}{e}$. Para $x = 0$ se obtiene $y = 0$, luego pasa por el origen.

c. La normal es perpendicular a la tangente, así que su pendiente es la inversa cambiada de signo: $-e$. Su ecuación es $y - 1 = -e(x - e)$, es decir, $y = -ex + e^2 + 1$. Con $y = 0$: $x = \dfrac{e^2 + 1}{e} = e + \dfrac{1}{e} \approx 3{,}09$. Corta al eje OX en $\left(e + \frac{1}{e},\, 0\right)$.

Solución del ejercicio 11

a. $f(1) = 2$ y $\lim_{x\to 1^-} f = 2$. Hace falta $\lim_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b = 2$.
b. Por la izquierda $f'(x) = 2x$, luego $f'(1^-) = 2$. Por la derecha $f'(x) = a$. Debe ser $a = 2$.
c. De $a = 2$ y $a + b = 2$ resulta $b = 0$. La función es $f(x) = x^2 + 1$ si $x \leq 1$ y $f(x) = 2x$ si $x > 1$.
d. Con $a = 3$, $b = -1$: $a + b = 2$, es continua. Pero $f'(1^-) = 2 \neq 3 = f'(1^+)$, así que tiene un punto anguloso y no es derivable en 1.

Solución del ejercicio 12

a. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Se anula en $x = 1$ y $x = 3$.
b. Signo de f': positivo en $(-\infty, 1)$, negativo en $(1, 3)$ y positivo en $(3, +\infty)$. Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.
c. Máximo relativo en $(1, 5)$ (de creciente a decreciente) y mínimo relativo en $(3, 1)$.
d. $f(0) = 1$ y $f(4) = 64 - 96 + 36 + 1 = 5$. Comparamos los valores $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(3) = 1$ y $f(4) = 5$: el máximo absoluto vale 5 (en $x = 1$ y en $x = 4$) y el mínimo absoluto vale 1 (en $x = 0$ y en $x = 3$).

Solución del ejercicio 13

a. Derivamos dos veces: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ y $f''(x) = 6x - 12$.
b. Donde $f'' > 0$ la gráfica es cóncava hacia arriba (convexa) y donde f'', hacia abajo. Como $6x - 12 > 0 \iff x > 2$, se curva hacia arriba en $(2, +\infty)$ y hacia abajo en $(-\infty, 2)$.
c. En $x = 2$ la segunda derivada se anula y cambia de signo, y $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$. El punto de inflexión es $(2, 3)$.
d. Criterio de la segunda derivada: $f''(1) = -6$, luego en $x = 1$ hay un máximo; $f''(3) = 6 > 0$, luego en $x = 3$ hay un mínimo. Es coherente con el estudio de la monotonía.

Solución del ejercicio 14

a. El lado paralelo mide $240 - 2x$. El área es $A(x) = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2$.
b. Las longitudes deben ser positivas: $x > 0$ y $240 - 2x > 0$, es decir, 0.
c. $A'(x) = 240 - 4x = 0 \Rightarrow x = 60$ m.
d. Dimensiones: 60 m por $240 - 120 = 120$ m. Área: $60 \cdot 120 = 7\,200$ m^2. Es máximo porque $A''(x) = -4$ (también A crece antes de 60 y decrece después).

Solución del ejercicio 15

a. La base es un cuadrado de lado $30 - 2x$ y la altura es x: $V(x) = x(30 - 2x)^2$, con 0.

b. $V'(x) = (30-2x)^2 + x \cdot 2(30-2x)(-2) = (30-2x)(30-6x)$. Se anula en $x = 15$ y en $x = 5$. Solo $x = 5$ está dentro del intervalo.
c. Para $x = 5$: $V = 5 \cdot 20^2 = 2\,000$ cm^3. Es máximo porque $V' > 0$ si x y V' si 5.
d. La lámina tiene 900 cm^2 y cuesta $900 \cdot 0{,}004 = 3{,}60$ €. Las cuatro esquinas suman $4 \cdot 25 = 100$ cm^2 de desperdicio.

Solución del ejercicio 16

a. $V = \pi r^2 h = 330 \Rightarrow h = \dfrac{330}{\pi r^2}$.
b. $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.
c. $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{660}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{165}{\pi} \Rightarrow r \approx 3{,}74$ cm. Es mínimo porque $S''(r) = 4\pi + \frac{1\,320}{r^3} > 0$.
d. $h = \dfrac{330}{\pi \cdot 3{,}745^2} \approx 7{,}49$ cm y $S \approx 264{,}4$ cm^2. Resulta $h \approx 2r$: la lata óptima es tan alta como el diámetro de su base.

Solución del ejercicio 17

a. Entre 12 € y 20 € el precio sube 8 € y la demanda baja de 152 a 120 tartas, 32 menos: pendiente -4 por euro. Con $p = 12$: $200 - 48 = 152$; con $p = 20$: $200 - 80 = 120$; con $p = 30$: $200 - 120 = 80$; con $p = 40$: $200 - 160 = 40$. Coincide con la tabla.
b. $I(p) = p(200 - 4p) = 200p - 4p^2$, $I'(p) = 200 - 8p = 0 \Rightarrow p = 25$ €. Ingresos: $25 \cdot 100 = 2\,500$ €.
c. $B(p) = (p - 10)(200 - 4p) = -4p^2 + 240p - 2\,000$, $B'(p) = -8p + 240 = 0 \Rightarrow p = 30$ €. Beneficio: $20 \cdot 80 = 1\,600$ €.
d. Con 25 € ingresa más (2 500 €), pero su beneficio es $15 \cdot 100 = 1\,500$ €, menor que 1 600 €. Al subir el precio vende menos tartas y gasta menos en ingredientes: lo que cuenta es el beneficio, no los ingresos.

Solución del ejercicio 18

a. $f(1) = 2$ y $f'(x) = 2x - 4$, $f'(1) = -2$. Tangente: $y - 2 = -2(x - 1)$, o sea $y = -2x + 4$. Cortes: $(0, 4)$ y $(2, 0)$.
b. Triángulo rectángulo de catetos 2 y 4: área $= \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$ unidades cuadradas.
c. Pendiente 2: $2x - 4 = 2 \Rightarrow x = 3$; $f(3) = 2$. Tangente: $y - 2 = 2(x - 3)$, es decir, $y = 2x - 4$.
d. La pendiente debería ser $-\frac{1}{2}$: $2x - 4 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$, y $f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16} - 7 + 5 = \frac{17}{16}$. Sí existe: el punto $\left(\frac{7}{4}, \frac{17}{16}\right)$.

Solución del ejercicio 19

a. $v(t) = 20 - 10t$. La velocidad inicial es $v(0) = 20$ m/s hacia arriba.
b. $v(t) = 0 \Rightarrow t = 2$ s. $h(2) = 1{,}5 + 40 - 20 = 21{,}5$ m. Es máximo, pues $h'' = -10$.
c. $5t^2 - 20t - 1{,}5 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 + 30}}{10}$. La solución positiva es $t \approx 4{,}07$ s.
d. $v(4{,}07) = 20 - 40{,}7 \approx -20{,}7$ m/s. Pasando a km/h: $20{,}7 \cdot 3{,}6 \approx 74{,}5$ km/h. El signo negativo indica que el cohete va hacia abajo.

Solución del ejercicio 20

a. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Condiciones: $f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$ y $f'(3) = 27 + 6a + b = 0$.
b. Restando: $24 + 8a = 0 \Rightarrow a = -3$, y entonces $b = -9$. Resulta $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.
c. $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$ (máximo) y $f(3) = 27 - 27 - 27 + 1 = -26$ (mínimo).
d. $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$, que es el punto medio de -1 y 3. Es una propiedad de todas las cúbicas.