Apuntes - Sucesiones y progresiones

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Las sucesiones describen magnitudes que evolucionan por periodos: ahorros mensuales, pagos de un préstamo, población año a año o el valor de un bien que se deprecia. Las progresiones, aritméticas y geométricas, son las más importantes y están detrás del interés compuesto.

Actividad de introducción: el reto de los 30 días

Pablo y Sara deciden ahorrar durante un mes. Pablo mete 1 € el primer día, 2 € el segundo, 3 € el tercero, y así sucesivamente. Sara mete 1 céntimo el primer día, 2 céntimos el segundo, 4 el tercero, y cada día el doble que el anterior. ¿Quién tendrá más dinero al cabo de 30 días? Pablo reúne $1+2+\cdots+30=465$ €. Sara, aunque empieza con céntimos, el día 30 tendría que meter más de 5 millones de euros y en total casi 10,7 millones: su reto es imposible. Las cantidades de Pablo forman una progresión aritmética y las de Sara, una geométrica. En este capítulo aprenderás a distinguirlas, a calcular cualquier término y sus sumas, y a aplicarlas al ahorro, a los préstamos, a la población y a la depreciación de los bienes.

Sucesiones

Definición: sucesión

Una **sucesión** es una lista ordenada de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$, uno por cada número natural. Se define con un **término general** a_n (fórmula en función de n) o con una **recurrencia** (cada término se calcula con los anteriores).

Ejemplo 1

Escribe los primeros términos de $a_n = 3n-2$ y de $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Primera: $1, 4, 7, 10, \ldots$. Segunda: $a_2 = 3\cdot 2 - 1 = 5$, $a_3 = 14$, $a_4 = 41$: $2, 5, 14, 41, \ldots$

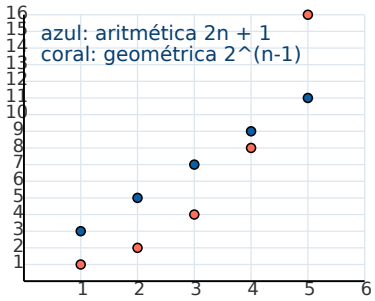
Progresiones aritméticas

Definición: progresión aritmética

En una **progresión aritmética** cada término se obtiene sumando al anterior una constante, la **diferencia** d. Si $d > 0$ crece y si d decrece. Sus términos, como puntos, están alineados.

Regla

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \qquad S_n = a_1 + \cdots + a_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}.$$



Método: hallar los datos de una aritmética

1. Con dos términos a_p y a_q: $d = \dfrac{a_q - a_p}{q - p}$.
2. Calcula $a_1 = a_p - (p-1)d$.
3. Escribe $a_n = a_1 + (n-1)d$.
4. Para la suma, usa $S_n = n(a_1 + a_n)/2$.

Ejemplo 2

En una aritmética $a_3 = 11$ y $a_8 = 26$. Halla a_1 y el término general.

$5d = 26 - 11 = 15 \Rightarrow d = 3$. $a_1 = 11 - 2 \cdot 3 = 5$. $a_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$.
Comprobación: $a_8 = 26$.

Ejemplo 3: ahorro

Ahorras 20 € el primer mes y cada mes 5 € más. ¿Cuánto en el mes 12 y en total?

$a_{12} = 20 + 11 \cdot 5 = 75$ €. $S_{12} = \dfrac{12(20 + 75)}{2} = 570$ €.

Progresiones geométricas

Definición: progresión geométrica

En una **progresión geométrica** cada término es el anterior multiplicado por una constante, la **razón** r. Modela el interés compuesto ($r = 1 + i$), el crecimiento porcentual ($r = 1 + \text{tasa}$) y la depreciación ($r = 1 - \text{tasa}$).

Regla

$$a_n = a_1\, r^{\,n-1}, \qquad S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}\ (r \neq 1).$$

Si $|r|$, la suma de infinitos términos converge: $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$.

Ejemplo 4

$a_1 = 3$, $r = 2$: a_6 y S_6. Y la suma infinita de $12 + 6 + 3 + \ldots$

$a_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$; $S_6 = \dfrac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$. Con razón $\frac{1}{2}$: $S_\infty = \dfrac{12}{1 - \frac{1}{2}} = 24$.

Ejemplo 5: razón desconocida

Si $a_2 = 6$ y $a_5 = 162$, halla r, a_1 y S_5.

$a_5/a_2 = r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$. $a_1 = 6/3 = 2$. $S_5 = \dfrac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = 242$.

Aplicaciones financieras

Propiedad: modelos

- **Interés compuesto:** los capitales $C_0,\ C_0(1+i),\ C_0(1+i)^2, \ldots$ forman una geométrica de razón $1 + i$.
- **Ahorro periódico** (a al final de cada año): $S = a\,\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$.
- **Depreciación:** $V_n = V_0(1 - r)^n$.
- **Población:** $P_n = P_0(1 + p)^n$.

Método: reconocer el tipo de progresión

1. Escribe los primeros términos.
2. Calcula las diferencias entre consecutivos y los cocientes.
3. Si las diferencias son constantes, es aritmética; si lo son los cocientes, geométrica.
4. Escribe el término general y úsalo.

Ejemplo 6: ahorro con interés

500 € al final de cada año al 2 % durante 6 años.

$500 \cdot \dfrac{1{,}02^6 - 1}{0{,}02} = 500 \cdot 6{,}308121 = 3\,154{,}06$ €.

Ejemplo 7: ¿cuántos años?

80 000 habitantes crecen un 2 % anual. ¿Cuándo superan los 100 000?

$1{,}02^n > 1{,}25 \Rightarrow n > \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}02} \approx 11{,}27$. Hacen falta 12 años ($1{,}02^{11} \approx 1{,}243$, $1{,}02^{12} \approx 1{,}268$).

Ejemplo 8: depreciación

Una máquina de 20 000 € pierde un 15 % de su valor cada año. ¿Cuánto vale tras 4 años y cuánto ha perdido?

La razón es $1 - 0{,}15 = 0{,}85$, así que $V_4 = 20000 \cdot 0{,}85^4 = 20000 \cdot 0{,}522006 \approx 10\,440$ €. Ha perdido unos $9\,560$ € en total, casi la mitad de su valor. Observa que la pérdida de cada año es menor que la del anterior, porque el 15 % se aplica a un valor cada vez menor.

Ejemplo 9: sueldo con subidas fijas

Un sueldo empieza en 22 000 € y sube 1 500 € cada año. ¿Cuánto cobra el año 10 y cuánto ha cobrado en total en esos 10 años?

Es aritmética con $d = 1500$: $a_{10} = 22000 + 9 \cdot 1500 = 35\,500$ €. La suma es $S_{10} = \dfrac{10(22000 + 35500)}{2} = 287\,500$ €. Si en lugar de una subida fija fuera una subida del 5 % anual, sería una progresión geométrica de razón 1,05 y el sueldo crecería cada vez más deprisa.

¡Atención!

- El término general es $a_1 + (n-1)d$ y $a_1 r^{n-1}$, no $a_1 + nd$ ni $a_1 r^n$.
- La razón es $1{,}04$, no 4.
- La suma infinita solo existe si $|r|$.

Observación

La fórmula de la suma aritmética se recuerda con la idea de Gauss: el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, etc., dan todos lo mismo. Con $1 + 2 + \cdots + 100$ hay 50 parejas de 101 y la suma es 5 050. En la geométrica, al multiplicar S_n por r y restar, casi todos los términos se cancelan y queda $S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$.

Ampliación: técnicas y aplicaciones

Definición: sucesiones crecientes, decrecientes y acotadas

Una sucesión es **creciente** si cada término es mayor o igual que el anterior, y **decreciente** si cada término es menor o igual. Una progresión aritmética es creciente si $d > 0$ y decreciente si $d < 0$. Una progresión geométrica de términos positivos es creciente si $r > 1$ y decreciente si $0 < r < 1$; si r es negativa, los signos se alternan. Una sucesión está **acotada** si todos sus términos están entre dos números fijos, como ocurre con el valor de un coche que se deprecia, que siempre está entre 0 y el precio de compra.

Propiedad: términos equidistantes

En una progresión aritmética, la suma de dos términos que están a la misma distancia de los extremos es constante: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$. Por eso la suma de n términos es n veces la media del primero y del último. En una progresión geométrica ocurre lo mismo con el producto: $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \cdots$. Además, en tres términos consecutivos de una aritmética el central es la media aritmética de los otros dos, y en una geométrica de términos positivos es su media geométrica.

Ejemplo 10

Calcula la suma de los múltiplos de 3 comprendidos entre 10 y 200.

El primero es 12 y el último 198: forman una aritmética de diferencia 3. Número de términos: $198 = 12 + 3(n-1)$, de donde $n = 63$. La suma es $S_{63} = \dfrac{63\,(12 + 198)}{2} = 6\,615$.

Método: resolver problemas con progresiones

1. Escribe los tres o cuatro primeros términos de la situación.
2. Decide si se suma una cantidad fija (aritmética) o se multiplica por un factor fijo (geométrica). Un porcentaje de aumento p da la razón $1 + p$ y uno de disminución, $1 - p$.
3. Identifica qué se pide: un término concreto, la suma de varios términos o el número de términos.
4. Si la incógnita está en el exponente, toma logaritmos: $r^n = k$ implica $n = \dfrac{\ln k}{\ln r}$, y redondea según el contexto.
5. Responde con las unidades y comprueba que el resultado es razonable.

Ejemplo 11

Un club de lectura de Palencia tenía 40 socios en 2024 y espera aumentar un 15 % cada año. ¿Cuántos socios tendrá en 2030? ¿En qué año superará los 150?

Es geométrica de razón 1,15: $S_n = 40 \cdot 1{,}15^n$, con n los años desde 2024. En 2030, $n = 6$: $40 \cdot 1{,}15^6 \approx 92{,}5$, unos 92 socios. Para superar 150: $1{,}15^n > 3{,}75$,

$n > \dfrac{\ln 3{,}75}{\ln 1{,}15} \approx 9{,}46$, así que en 2034 ($n = 10$).

Regla: capitalización y ahorro periódico

Si un capital C_0 se deposita al tipo anual i con capitalización k veces al año, al cabo de t años se obtiene $C = C_0\left(1 + \dfrac{i}{k}\right)^{kt}$. Cuanto más frecuente es la capitalización, algo mayor es el capital final, porque los intereses empiezan antes a producir intereses. Para comparar ofertas se usa la **tasa anual equivalente** (TAE): el tipo anual que daría el mismo resultado con una sola capitalización al año. Si se ingresa una cuota a al final de cada periodo a un tipo i por periodo, el capital tras n periodos es la suma de una progresión geométrica: $a\,\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$.

Ejemplo 12

Calcula la TAE de un depósito al 3 % anual con capitalización mensual.

En un año, cada euro se convierte en $\left(1 + \dfrac{0{,}03}{12}\right)^{12} = 1{,}0025^{12} \approx 1{,}030416$. La TAE es aproximadamente $3{,}04\,\%$, algo mayor que el 3 % nominal.

Errores frecuentes

- Usar $a_1 + nd$ o $a_1 r^n$ en lugar de $a_1 + (n-1)d$ y $a_1 r^{n-1}$: el primer término no ha sumado ni multiplicado nada.
- Confundir el número de términos con el valor del último término.
- Escribir la razón como el porcentaje (3) en lugar de 1,03.
- Aplicar la suma infinita cuando la razón no cumple $|r| < 1$.
- Redondear mal los años: si $n > 15{,}9$, hacen falta 16 años, no 15.

¿Sabías que?

Cuenta la leyenda que el inventor del ajedrez pidió al rey de la India un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, y así hasta la casilla 64. El rey aceptó pensando que era poco, pero la suma es $2^{64} - 1$, unos 18 trillones de granos: más trigo del que se ha cosechado en toda la historia. Es el mismo crecimiento que hace que una deuda con intereses altos se dispare si no se paga a tiempo.

El consejo de Otto

Escribe siempre los tres o cuatro primeros términos: te ayudará a ver si hay una diferencia o una razón constante antes de usar fórmulas.