Soluciones - Sucesiones y progresiones

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. $a_1 = 1 - 1 = 0$; $a_2 = 4 - 1 = 3$; $a_3 = 8$; $a_4 = 15$; $a_5 = 24$.
b. $b_1 = -2$; $b_2 = 4$; $b_3 = -6$; $b_4 = 8$; $b_5 = -10$. Los signos se alternan.
c. $c_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$; $c_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$; $c_4 = 17$; $c_5 = 33$.
d. $a_{20} = 400 - 1 = 399$; $b_{15} = (-1)^{15} \cdot 30 = -30$. Con la recurrencia hay que calcular uno a uno los 19 términos anteriores; por eso es útil encontrar el término general, que aquí es $c_n = 2^n + 1$ ($c_5 = 32 + 1 = 33$ ✓).

Solución del ejercicio 2

a. Cada término se obtiene sumando 4 al anterior: $7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23$. El término general es $a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + 4(n-1) = 4n + 3$.
b. $a_{10} = 4 \cdot 10 + 3 = 43$. La suma de los diez primeros es la media del primero y el último por el número de términos: $S_{10} = \dfrac{10\,(7 + 43)}{2} = 250$.
c. Igualamos al término general: $4n + 3 = 103$ da $n = 25$, así que 103 es el término 25. En cambio, $4n + 3 = 110$ da $n = 26{,}75$, que no es natural: 110 no pertenece a la progresión.
d. Por el apartado b), $S_{10} = 250$: hay que sumar 10 términos.

Solución del ejercicio 3

a. Para pasar de a_4 a a_{10} se suma la diferencia 6 veces: $6d = 41 - 17 = 24$, luego $d = 4$.
b. Retrocedemos 3 saltos desde a_4: $a_1 = a_4 - 3d = 17 - 12 = 5$. El término general es $a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$.
c. $a_{20} = 4 \cdot 20 + 1 = 81$ y $S_{20} = \dfrac{20\,(5 + 81)}{2} = 860$.
d. Resolvemos la inecuación $4n + 1 > 100$: $n > 24{,}75$. Como n es natural, se supera 100 a partir del término 25, que vale $a_{25} = 101$ (el anterior, $a_{24} = 97$, aún no lo supera).

Solución del ejercicio 4

a. Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 3: $5,\ 15,\ 45,\ 135,\ 405$. El término general es $a_n = a_1 r^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1}$.
b. $a_6 = 5 \cdot 3^5 = 1\,215$. Fórmula de la suma de una geométrica:

$S_6 = \dfrac{a_1(r^6-1)}{r-1} = \dfrac{5\,(3^6-1)}{3-1} = \dfrac{5\cdot 728}{2} = 1\,820.$

c. $5\cdot 3^{n-1} = 405$ da $3^{n-1} = 81 = 3^4$, luego $n-1=4$ y $n=5$: 405 es el quinto término.

d. Es creciente porque $a_1 > 0$ y $r > 1$. La suma de infinitos términos no existe, ya que con $|r| \geq 1$ las sumas parciales crecen sin límite.

Solución del ejercicio 5

a. De a_2 a a_5 se multiplica tres veces por la razón: $r^3 = \dfrac{a_5}{a_2} = \dfrac{96}{12} = 8$, luego $r = \sqrt[3]{8} = 2$.

b. Retrocedemos un paso dividiendo por la razón: $a_1 = \dfrac{12}{2} = 6$. El término general es $a_n = 6\cdot 2^{n-1}$.

c. Aplicamos la fórmula de la suma: $S_8 = \dfrac{6\,(2^8-1)}{2-1} = 6\cdot 255 = 1\,530.$

d. Los tres primeros términos son 6, 12 y 24, así que su producto es $6\cdot 12\cdot 24 = 1\,728$. Observa que $1\,728 = 12^3$: el término central elevado al número de factores.

Solución del ejercicio 6

a. La razón es $r = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$. Como $|r| < 1$, la suma infinita existe:

$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{18}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{18}{2/3} = 27.$

b. Aquí $r = 2$ y $|r| > 1$: los términos crecen cada vez más y la suma no existe, crece sin límite.

c. La suma $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots$ es geométrica con $a_1 = 0{,}3$ y $r = 0{,}1$:

$S_\infty = \dfrac{0{,}3}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}3}{0{,}9} = \dfrac{1}{3}.$

d. Escribimos $0{,}4545\ldots = 0{,}45 + 0{,}0045 + \cdots$, con $a_1 = 0{,}45$ y $r = 0{,}01$:

$S_\infty = \dfrac{0{,}45}{0{,}99} = \dfrac{45}{99} = \dfrac{5}{11}$. Así se obtiene la fracción generatriz de un decimal periódico.

Solución del ejercicio 7

a. Las diferencias entre términos consecutivos son siempre 4: es aritmética de diferencia $d = 4$, con $a_n = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$.

b. Los cocientes entre términos consecutivos son siempre 3: es geométrica de razón

$r = 3$, con $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

c. Las diferencias $3, 5, 7$ no son constantes y los cocientes $4;\ 2{,}25$ tampoco: no es aritmética ni geométrica. Son los cuadrados perfectos, $a_n = n^2$.

d. Cada término es la mitad del anterior: geométrica de razón $\frac{1}{2}$, decreciente. $a_n = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Solución del ejercicio 8

a. Cada semana mete 2 € más que la anterior, así que las cantidades forman una progresión aritmética con $a_1 = 10$ y $d = 2$: $a_n = 10 + 2(n-1) = 2n + 8$.

b. $a_{20} = 2 \cdot 20 + 8 = 48$. La semana 20 mete 48 €.

c. $S_{20} = \dfrac{20\,(10 + 48)}{2} = 580$. En 20 semanas ha ahorrado 580 €.

d. La suma de n semanas es $S_n = \dfrac{n\,(10 + 2n + 8)}{2} = n^2 + 9n$. Resolvemos $n^2 + 9n - 1\,000 = 0$: la raíz positiva es $n \approx 27{,}44$. Comprobamos: $S_{27} = 972$ € (no llega) y $S_{28} = 1\,036$ €. Necesita 28 semanas.

Solución del ejercicio 9

a. Las butacas por fila forman una progresión aritmética con $a_1 = 20$ y $d = 2$: $a_n = 20 + 2(n-1)$. La fila 10 tiene $a_{10} = 20 + 18 = 38$ butacas y la última, $a_{25} = 20 + 48 = 68$ butacas.

b. Sumamos las 25 filas: $S_{25} = \dfrac{25\,(20 + 68)}{2} = 1\,100$ butacas.

c. Las 5 primeras filas tienen $S_5 = \dfrac{5\,(20 + 28)}{2} = 120$ butacas. A la venta quedan $1\,100 - 120 = 980$ butacas.

d. Si se venden todas las disponibles, la recaudación es $980 \cdot 18 = 17\,640$ €.

Solución del ejercicio 10

a. Aumentar un 3 % equivale a multiplicar por $1 + 0{,}03 = 1{,}03$. Como cada año se multiplica por el mismo número, las poblaciones forman una progresión geométrica de razón $r = 1{,}03$: $P_n = 5\,000 \cdot 1{,}03^n$.

b. $P_1 = 5\,150$; $P_2 = 5\,304{,}5 \approx 5\,305$; $P_{10} = 5\,000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 6\,720$ habitantes.

c. Planteamos $5\,000 \cdot 1{,}03^n \geq 8\,000$, es decir, $1{,}03^n \geq 1{,}6$. Con logaritmos, $n \geq \dfrac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}03} = 15{,}90$: tardará 16 años.

d. Sumar 150 cada año da una progresión aritmética de diferencia 150: $5\,000 + 150 \cdot 10 = 6\,500$ habitantes, menos que los 6 720 del crecimiento porcentual.

Solución del ejercicio 11

a. $r = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. $V_n = 1\,200 \cdot 0{,}75^n$.
b. $V_1 = 900$ €; $V_2 = 675$ €; $V_3 = 506{,}25$ €.
c. Pierde $1\,200 - 506{,}25 = 693{,}75$ €. No es el triple de 300 €, porque cada año el 25 % se aplica a un valor más pequeño: pierde 300, 225 y 168,75 €.
d. $0{,}75^n < 0{,}25$ implica $n > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}75} = 4{,}82$: a partir de 5 años.

Solución del ejercicio 12

a. Cada año el capital se multiplica por $1{,}025$: $C_n = 6\,000 \cdot 1{,}025^n$. Es una progresión geométrica de razón 1,025.
b. $C_8 = 6\,000 \cdot 1{,}025^8 = 7\,310{,}42$ €. Los intereses son la diferencia con lo depositado: $7\,310{,}42 - 6\,000 = 1\,310{,}42$ €.
c. El tipo mensual es $\dfrac{0{,}025}{12}$ y en 8 años hay $8 \cdot 12 = 96$ meses:

$$6\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}025}{12}\right)^{96} = 7\,326{,}89 \text{ €}.$$

d. La capitalización mensual da $7\,326{,}89 - 7\,310{,}42 = 16{,}47$ € más. Con interés simple solo tendrían $6\,000 \cdot (1 + 0{,}025 \cdot 8) = 7\,200$ €, menos que con las dos ofertas.

Solución del ejercicio 13

a. Cada altura es $\frac{3}{5} = 0{,}6$ de la anterior: $2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$ m; $1{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}72$ m; $0{,}72 \cdot 0{,}6 = 0{,}432$ m.
b. Tras el cuarto bote: $2 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592$ m, unos 26 cm.
c. Buscamos $2 \cdot 0{,}6^n < 0{,}1$, es decir, $0{,}6^n < 0{,}05$. Con logaritmos (cambia el sentido porque $\ln 0{,}6 < 0$): $n > \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}6} = 5{,}86$. Sube menos de 10 cm tras el sexto bote.
d. Primero baja 2 m; después cada altura se recorre dos veces, subiendo y bajando:

$$2 + 2\,(1{,}2 + 0{,}72 + \cdots) = 2 + 2 \cdot \frac{1{,}2}{1 - 0{,}6} = 2 + 2 \cdot 3 = 8 \text{ m en total.}$$

Solución del ejercicio 14

a. Las latas por fila forman la progresión aritmética $1, 2, 3, \ldots$. En 10 filas: $S_{10} = \dfrac{10\,(1 + 10)}{2} = 55$ latas.
b. Con primer término 1 y último n: $S_n = \dfrac{n\,(n + 1)}{2}$.

c. Resolvemos $\frac{n(n+1)}{2} = 210$, es decir, $n^2 + n - 420 = 0$: $n = \frac{-1 \pm 41}{2}$. La solución positiva es $n = 20$, así que con 210 latas se forman exactamente 20 filas completas.
d. Ahora las filas forman una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$: $S_8 = \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 255$ latas. Con muchas menos filas hacen falta muchas más latas.

Solución del ejercicio 15

a. A: aritmética, $a_n = 24\,000 + 1\,000(n-1)$. B: geométrica de razón 1,06, $b_n = 22\,000 \cdot 1{,}06^{n-1}$.
b. A: 24 000; 26 000; 28 000; 29 000; 33 000 €. B: 22 000; 24 719; 27 774; 29 441; 37 169 €.
c. El año 5, A paga 28 000 € y B 27 774 €; el año 6, A paga 29 000 € y B 29 441 €. Desde el sexto año gana más en B.
d. A: $S_{10} = \frac{10\,(24\,000 + 33\,000)}{2} = 285\,000$ €. B: $S_{10} = \frac{22\,000\,(1{,}06^{10} - 1)}{0{,}06} \approx 289\,977$ €.
e. En 10 años B da unos 4 977 € más, y la diferencia seguiría creciendo. En 4 años, en cambio, A da $\frac{4(24\,000 + 27\,000)}{2} = 102\,000$ € y B $\approx 96\,242$ €: convendría A.

Solución del ejercicio 16

a. Cada ingreso de 100 € se convierte en $100 \cdot 1{,}0025^k$, con $k = 0, 1, \ldots, 59$ meses: la suma es geométrica de razón 1,0025.
b. $S = 100 \cdot \frac{1{,}0025^{60} - 1}{0{,}0025} = 6\,464{,}67$ €.
c. Aporta $60 \cdot 100 = 6\,000$ €. Intereses: $464{,}67$ €.
d. $100 \cdot \frac{1{,}0025^n - 1}{0{,}0025} = 10\,000$ implica $1{,}0025^n = 1{,}25$ y $n = \frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}0025} = 89{,}37$: 90 meses, es decir, siete años y medio.
e. $150 \cdot \frac{1{,}0025^{60} - 1}{0{,}0025} = 9\,697{,}01$ €. Sí: es 1,5 veces el resultado anterior, porque la cuota multiplica toda la suma.

Solución del ejercicio 17

a. Nuevas: 3, 9, 27, 81, 243. Totales: 3, 12, 39, 120, 363.
b. $a_n = 3^n$. Total: $S_n = \frac{3\,(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$.

c. $S_{10} = \dfrac{3^{11} - 3}{2} = \dfrac{177\,147 - 3}{2} = 88\,572$ personas.

d. $\dfrac{3^{n+1} - 3}{2} > 48\,000\,000$ implica $3^{n+1} > 96\,000\,003$ y $n + 1 > 16{,}73$: en la hora 16 ya lo habrían visto más de 48 millones (con $n = 16$, $S_{16} = 64\,570\,080$).

e. Porque la población es limitada: cada vez es más difícil encontrar personas que no lo hayan visto, y el crecimiento se frena.

Solución del ejercicio 18

a. Triángulos: 1, 3, 9, 27, 81. Área (m²): 1; 0,75; 0,5625; 0,421875; 0,31640625.

b. Triángulos: geométrica de razón 3, $t_n = 3^n$. Área: geométrica de razón $\frac{3}{4}$, $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

c. $0{,}75^4 = 0{,}3164$: el 31,64 %.

d. $0{,}75^n < 0{,}1$ implica $n > \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}75} = 8{,}00$: a partir del paso 9.

e. Como $\frac{3}{4} < 1$, el área tiende a 0, mientras que el número de triángulos crece sin límite: infinitos triángulos cada vez más pequeños.

Solución del ejercicio 19

a. $E_n = 12\,000 \cdot 0{,}92^n$.

b. $E_5 = 12\,000 \cdot 0{,}92^5 \approx 7\,909$ toneladas.

c. $0{,}92^n < 0{,}5$ implica $n > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}92} = 8{,}31$: con $n = 9$, en 2034. Sí cumple, por muy poco.

d. Suma de 10 términos con $a_1 = 12\,000$ y $r = 0{,}92$: $\dfrac{12\,000\,(1 - 0{,}92^{10})}{1 - 0{,}92} \approx 84\,842$ toneladas.

e. Sin plan: $10 \cdot 12\,000 = 120\,000$ t. Ahorro: unas 35 158 toneladas de CO_2.

Solución del ejercicio 20

a. $(a - d) + a + (a + d) = 3a = 15$, luego $a = 5$.

b. Nuevos números: $6 - d$, 9 y $24 + d$. Están en progresión geométrica si $9^2 = (6 - d)(24 + d)$.

c. $81 = 144 + 6d - 24d - d^2$, es decir, $d^2 + 18d - 63 = 0$, con $d = \dfrac{-18 \pm 24}{2}$: $d = 3$ o $d = -21$.

d. $d = 3$: números $2, 5, 8$ (aritmética); nuevos $3, 9, 27$ (razón 3) ✓. $d = -21$: números $26, 5, -16$; nuevos $27, 9, 3$ (razón $\frac{1}{3}$) ✓.