Apuntes - Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Un sistema de ecuaciones reúne varias condiciones que deben cumplirse a la vez. Sirve para hallar puntos de equilibrio, mezclas, precios o edades, y las inecuaciones con dos incógnitas permiten planificar la producción con recursos limitados.

Actividad de introducción: el puesto del mercadillo

Ana y su hermano venden pulseras y llaveros hechos a mano en el mercadillo de los domingos de Cádiz. Un domingo vendieron 40 artículos y recaudaron 150 €. Las pulseras cuestan 5 € y los llaveros 2,50 €. ¿Cuántos vendieron de cada? Una sola ecuación no basta: con «40 artículos» hay muchas posibilidades, y con «150 €» también. Hay que exigir las dos condiciones a la vez, y eso es un **sistema de ecuaciones**: $x+y=40$ y $5x+2{,}5y=150$, con solución 20 pulseras y 20 llaveros. Si además quieren saber qué combinaciones les permiten no pasar de 30 horas de trabajo a la semana, aparecen las **inecuaciones**. En este capítulo aprenderás a resolver sistemas de dos y tres ecuaciones, algunos sistemas no lineales y sistemas de inecuaciones, con aplicaciones a la economía y a la empresa.

Sistemas de dos ecuaciones lineales

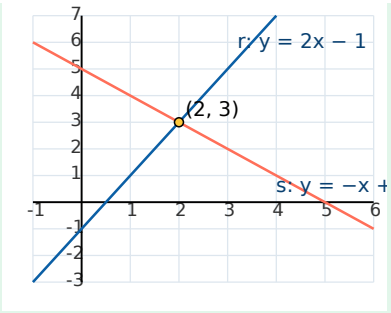
Definición: sistema y su clasificación

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, por ejemplo $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x+y=5 \end{cases}$, se interpreta como dos rectas. Según su posición es:

- **Compatible determinado (SCD)**: se cortan en un punto, una única solución.
- **Compatible indeterminado (SCI)**: coinciden, infinitas soluciones.
- **Incompatible (SI)**: paralelas distintas, sin solución.

Propiedad: criterio con los coeficientes

Para $ax+by=c$ y $a'x+b'y=c'$: si $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ es SCD; si $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ es SCI; si $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ es SI.



Método: sustitución, igualación y reducción

1. **Sustitución**: despeja una incógnita en una ecuación y sustitúyela en la otra.
2. **Igualación**: despeja la misma incógnita en las dos y iguala.
3. **Reducción**: multiplica las ecuaciones para que al sumarlas desaparezca una incógnita.
4. Calcula la otra incógnita y comprueba en las dos ecuaciones.

Ejemplo 1

Resuelve $3x + 2y = 16$, $5x - 2y = 0$.

Sumando, $8x = 16 \Rightarrow x = 2$. En la segunda, $10 - 2y = 0 \Rightarrow y = 5$. Solución $(2, 5)$; en la primera: $6 + 10 = 16$.

Ejemplo 2: problema

Una librería vende cuadernos a 3 € y bolígrafos a 1,50 €. Un cliente compra 12 artículos y paga 27 €.

$c + b = 12$ y $3c + 1{,}5b = 27$. Con $b = 12 - c$: $3c + 18 - 1{,}5c = 27 \Rightarrow c = 6$, $b = 6$. Comprobación: $18 + 9 = 27$.

¡Atención!

Al restar ecuaciones en el método de reducción es fácil cambiar mal los signos. Da siempre las dos incógnitas y comprueba en ambas ecuaciones. En un problema, escribe qué representa cada incógnita y usa las mismas unidades.

Sistemas de tres ecuaciones: método de Gauss

Regla: operaciones permitidas

En el método de Gauss se escalona el sistema (una ecuación sin x, otra sin x ni y) con operaciones que no cambian las soluciones: intercambiar ecuaciones, multiplicar una por un número distinto de cero y sumar a una un múltiplo de otra. Se resuelve de abajo arriba.

Ejemplo 3

Resuelve $x+y+z=6$, $2x-y+z=3$, $x+2y-z=2$.

Primera + tercera: $2x+3y=8$. Segunda + tercera: $3x+y=5 \Rightarrow y=5-3x$. Entonces $2x+15-9x=8 \Rightarrow x=1$, $y=2$. De la primera, $z=3$. Solución $(1,2,3)$.

Sistemas no lineales sencillos

Método: recta y curva

1. Despeja una incógnita en la ecuación lineal.
2. Sustitúyela en la ecuación de segundo grado.
3. Resuelve la ecuación resultante (0, 1 o 2 soluciones).
4. Calcula la otra incógnita en cada caso: son los puntos de corte.

Ejemplo 4

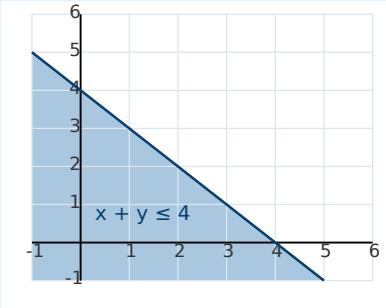
Resuelve $y=x^2$, $y=2x+3$.

Igualando, $x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=3$ o $x=-1$, con $y=9$ y $y=1$. Soluciones $(3,9)$ y $(-1,1)$.

Inecuaciones con dos incógnitas y sistemas de inecuaciones

Definición: semiplano

La solución de una inecuación como $x+y \leq 4$ es un **semiplano**: se dibuja la recta $x+y=4$ y se sombrea el lado que cumple la desigualdad. La recta es continua si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$ y discontinua si es o $>$.



Método: sombrear la región

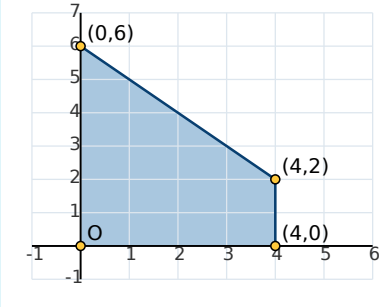
1. Dibuja la recta frontera.
2. Prueba un punto que no esté en ella (el origen, si puede ser).
3. Si cumple la desigualdad, sombrea su lado; si no, el contrario.
4. Para un sistema, la solución es la intersección de los semiplanos; sus vértices

salen de resolver pares de rectas.

Ejemplo 5

Región $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 4$, $x + y \leq 6$.

Vértices: $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ (de $x = 4$ y $x + y = 6$) y $(0, 6)$.



Observación

Esta idea es la base de la programación lineal, muy usada en economía: los vértices de la región factible son los candidatos a producción óptima cuando los recursos (horas, materias primas) son limitados. Si el sistema es indeterminado en un problema real, solo valen las soluciones con sentido (enteras y no negativas). Por ejemplo, si se fabrican mesas y sillas con un número limitado de horas de montaje y de pintura, cada recurso da una desigualdad, y la región donde se cumplen todas a la vez contiene todos los planes de producción posibles. El punto de equilibrio entre costes e ingresos, por su parte, se obtiene igualando las dos funciones, es decir, resolviendo un sistema.

Ampliación: técnicas y aplicaciones

Método: el método de Gauss paso a paso

1. Ordena las ecuaciones de forma que la primera tenga coeficiente de x igual a 1 o lo más sencillo posible.
2. Usa la primera ecuación para eliminar la x de las demás: a cada una se le resta un múltiplo adecuado de la primera.
3. Usa la nueva segunda ecuación para eliminar la y de la tercera. El sistema queda escalonado.
4. Lee la última ecuación: si es del tipo $az = b$ con $a \neq 0$, el sistema es compatible determinado; si queda $0 = 0$, es compatible indeterminado; si queda $0 = b$ con $b \neq 0$, es incompatible.
5. Resuelve de abajo arriba y comprueba en las ecuaciones originales.

Propiedad: la forma escalonada indica el tipo de sistema

Cuando un sistema de tres ecuaciones queda escalonado, el número de ecuaciones útiles (las que no son $0 = 0$) decide su tipo. Si hay tres ecuaciones útiles, la solución es única. Si una ecuación desaparece porque era combinación de las otras, queda una incógnita libre, llamada **parámetro**, y hay infinitas soluciones. Si aparece una contradicción, no hay ninguna. En los problemas de la vida real, un sistema indeterminado significa que los datos no bastan para dar una única respuesta, y entonces se elige la mejor solución con otro criterio, como el coste mínimo.

Ejemplo 6

Resuelve 

La segunda ecuación es el doble de la primera: al hacer $E_2 - 2E_1$ queda $0 = 0$. Con $E_3 - E_1$: $-3y + 2z = 3$. Tomamos $z = \lambda$: $y = \dfrac{2\lambda - 3}{3}$ y $x = 1 - 2y + \lambda = \dfrac{9 - \lambda}{3}$. Por ejemplo, con $\lambda = 3$ resulta $(2, 1, 3)$: $2 + 2 - 3 = 1$ ✓ y $2 - 1 + 3 = 4$ ✓. Es compatible indeterminado.

Método: sistemas no lineales

1. Despeja una incógnita en la ecuación más sencilla, normalmente la lineal.
2. Sustitúyela en la otra ecuación: aparece una ecuación con una sola incógnita, a menudo de segundo grado.
3. Resuélvela y calcula la otra incógnita para cada solución.
4. Comprueba cada pareja en las dos ecuaciones y descarta las que no tengan sentido en el problema, por ejemplo longitudes negativas.

Método: resolver un sistema de inecuaciones lineales

1. Para cada inecuación, dibuja la recta frontera (cambiando la desigualdad por una igualdad) con dos de sus puntos.
2. Elige un punto de prueba que no esté en la recta, normalmente $(0, 0)$, y comprueba si cumple la inecuación: si la cumple, la solución es el semiplano que lo contiene; si no, el otro.
3. La solución del sistema es la intersección de todos los semiplanos, llamada **región factible**.
4. Calcula los vértices resolviendo los sistemas de dos rectas frontera que se cortan en ellos.

Ejemplo 7

Una pastelería de Burgos hace tartas de queso (beneficio 6 €) y de chocolate (beneficio 8 €). Cada día puede hacer como máximo 30 tartas y tiene 40 kg de harina; cada tarta de queso usa 1 kg y cada una de chocolate 2 kg. ¿Qué

producción da más beneficio?

Con x tartas de queso e y de chocolate: $x + y \leq 30$, $x + 2y \leq 40$, $x, y \geq 0$. Vértices: $(0, 0)$, $(30, 0)$, $(0, 20)$ y el corte de las dos rectas, $(20, 10)$. Beneficio $6x + 8y$: 0, 180, 160 y 200 €. Lo mejor es hacer 20 de queso y 10 de chocolate, con 200 € de beneficio. El valor máximo de una función lineal en una región así siempre está en un vértice.

Observación: interpretar las soluciones

En los problemas de contexto no basta con resolver: hay que comprobar que la solución tiene sentido. Las cantidades de personas, entradas o productos deben ser números naturales; las longitudes y los precios, positivos. Si el sistema da una solución decimal cuando se cuentan objetos, probablemente los datos no son coherentes. Además, conviene responder con una frase que use las unidades del enunciado.

Errores frecuentes

- Restar mal los signos al combinar ecuaciones en el método de Gauss: escribe cada paso.
- Cambiar de ecuación de referencia a mitad del proceso y perder una ecuación.
- Olvidar comprobar las soluciones de los sistemas no lineales.
- Elegir mal el semiplano: usa siempre un punto de prueba.
- En un sistema indeterminado, dar una sola solución como si fuera la única.

¿Sabías que?

El método que llamamos de Gauss ya aparece en el libro chino *Los nueve capítulos sobre el arte matemático*, escrito hace más de 2 000 años, donde se resuelve un problema de cosechas de tres tipos de cereal. Carl Friedrich Gauss lo sistematizó en el siglo XIX para calcular la órbita de un asteroide. Hoy los ordenadores resuelven con él sistemas de millones de ecuaciones para predecir el tiempo o gestionar las redes eléctricas.

El consejo de Otto

Si en un sistema aparece un coeficiente igual a 1 o -1, despeja esa incógnita y usa sustitución: ahorrarás cálculos.