Soluciones - Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. De la segunda, $x = 1 + y$. En la primera: $2(1 + y) + 3y = 12$, $5y = 10$, $y = 2$ y $x = 3$.
b. Despejamos x en las dos: $x = \dfrac{12 - 3y}{2}$ y $x = 1 + y$. Igualando: $12 - 3y = 2 + 2y$, $5y = 10$, $y = 2$ y $x = 3$.
c. Multiplicamos la segunda por 3: $3x - 3y = 3$. Sumando con la primera: $5x = 15$, $x = 3$, y entonces $y = x - 1 = 2$.
d. $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ ✓ y $3 - 2 = 1$ ✓. Las dos rectas se cortan en el punto $(3, 2)$: sistema compatible determinado.

Solución del ejercicio 2

a. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{10}$: las rectas coinciden. Compatible indeterminado (infinitas soluciones).
b. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} \neq \dfrac{5}{7}$: rectas paralelas distintas. Incompatible (sin solución).
c. $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-1}{1}$: compatible determinado. Sumando: $4x = 8$, $x = 2$, $y = 2$.
d. Debe cumplirse $\dfrac{1}{2} = \dfrac{k}{4} = \dfrac{3}{6}$, luego $k = 2$. Para cualquier otro valor de k el sistema es compatible determinado.

Solución del ejercicio 3

a. $E_2 - 2E_1$: $-3y - z = -9$, es decir, $3y + z = 9$. $E_3 - E_1$: $y - 2z = -4$.
b. $3 \cdot (y - 2z = -4)$ menos $(3y + z = 9)$: $-7z = -21$. Sistema escalonado: $x + y + z = 6$; $3y + z = 9$; $-7z = -21$.
c. $z = 3$; $3y + 3 = 9$ da $y = 2$; $x + 2 + 3 = 6$ da $x = 1$.
d. $1 + 2 + 3 = 6$ ✓; $2 - 2 + 3 = 3$ ✓; $1 + 4 - 3 = 2$ ✓. Compatible determinado con solución $(1, 2, 3)$.

Solución del ejercicio 4

a. $E_2 - E_1$: $-2y + z = -1$. $E_3 - 2E_1$: $-2y + z = -1$. Restando estas dos queda $0 = 0$: la tercera ecuación es la suma de las dos primeras.
b. Compatible indeterminado. Con $z = \lambda$: $y = \dfrac{1+\lambda}{2}$ y $x = 4 - y - \lambda = \dfrac{7-3\lambda}{2}$.
c. $\lambda = 1$: $(2, 1, 1)$; $\lambda = 3$: $(-1, 2, 3)$. Por ejemplo, $(2, 1, 1)$: $2 + 1 + 1 = 4$, $2 - 1 + 2 = 3$, $4 + 3 = 7$ ✓.
d. $E_3 - 2E_1$ da $-2y + z = 0$, que contradice $-2y + z = -1$: resulta $0 = 1$. El sistema es incompatible.

Solución del ejercicio 5

a. $y = 7 - x$: $x(7 - x) = 12$, $x^2 - 7x + 12 = 0$, $x = 3$ o $x = 4$. Soluciones $(3, 4)$ y $(4, 3)$.
b. $x = y + 1$: $(y + 1)^2 + y^2 = 25$, $2y^2 + 2y - 24 = 0$, $y^2 + y - 12 = 0$, $y = 3$ o $y = -4$. Soluciones $(4, 3)$ y $(-3, -4)$.
c. $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5; $x - y = 1$ es una recta. Se cortan en los puntos $(4, 3)$ y $(-3, -4)$.
d. Dos: la recta puede cortarla en dos puntos, ser tangente (uno) o no tocarla (ninguno).

Solución del ejercicio 6

a. Si $x = 0$, $y = 6$; si $y = 0$, $x = 3$. La recta pasa por $(0, 6)$ y $(3, 0)$.
b. $2 \cdot 0 + 0 = 0 \leq 6$ es cierto: la solución es el semiplano que contiene al origen, es decir, el que queda por debajo de la recta.
c. $(1, 2)$: $4 \leq 6$ sí. $(2, 3)$: $7 \leq 6$ no. $(3, 0)$: $6 \leq 6$ sí (está en la frontera). $(-1, 7)$: $5 \leq 6$ sí.
d. Sí, porque la desigualdad es $\leq$. Con $2x + y < 6$ la recta no se incluiría y se dibujaría discontinua.

Solución del ejercicio 7

a. $x + y = 5$ pasa por $(5, 0)$ y $(0, 5)$; $x - y = -1$ pasa por $(0, 1)$ y $(-1, 0)$. Con el punto $(0, 0)$ se comprueba que la región está por debajo de las dos rectas y en el primer cuadrante.
b. $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 1)$ y el corte de $x + y = 5$ con $x - y = -1$: sumando, $2x = 4$, $x = 2$, $y = 3$. Vértice $(2, 3)$.
c. $(1, 1)$: $2 \leq 5$ y $0 \geq -1$, sí. $(1, 3)$: $4 \leq 5$, pero $-2 \geq -1$ es falso, no pertenece.
d. $F(0, 0) = 0$; $F(5, 0) = 10$; $F(2, 3) = 13$; $F(0, 1) = 3$. El máximo, 13, está en $(2, 3)$.

Solución del ejercicio 8

a. x: entradas de adulto; y: infantiles. $x + y = 250$ y $8x + 5y = 1\,700$.
b. Multiplicamos la primera por 5: $5x + 5y = 1\,250$. Restando: $3x = 450$, $x = 150$ y $y = 100$.
c. $150 + 100 = 250$ ✓ y $8 \cdot 150 + 5 \cdot 100 = 1\,200 + 500 = 1\,700$ ✓.
d. Daría $3x = 400$, $x = 133{,}3$: no es un número entero de entradas, así que esa recaudación sería imposible.

Solución del ejercicio 9

a. x: kg de arábica; y: kg de robusta. $x + y = 60$ y $12x + 7y = 60 \cdot 10 = 600$.
b. $y = 60 - x$: $12x + 420 - 7x = 600$, $5x = 180$, $x = 36$ kg y $y = 24$ kg.
c. $\dfrac{36}{60} = 0{,}6$: el 60 %.
d. $12x + 7(60 - x) = 660$: $5x = 240$, $x = 48$ kg de arábica y 12 kg de robusta.

Solución del ejercicio 10

a. $2x + y + z = 6{,}30$; $x + 2y + z = 6{,}90$; $3x + y + 2z = 9{,}60$.
b. Ordenamos poniendo primero $x + 2y + z = 6{,}90$ (E_1). $E_2 - 2E_1$ (con E_2 la del primer cliente): $-3y - z = -7{,}50$. $E_3 - 3E_1$: $-5y - z = -11{,}10$. Restando estas dos: $2y = 3{,}60$, $y = 1{,}80$. Entonces $z = 7{,}50 - 5{,}40 = 2{,}10$ y $x = 6{,}90 - 3{,}60 - 2{,}10 = 1{,}20$. Naranjas 1,20 €/kg, manzanas 1,80 €/kg y plátanos 2,10 €/kg.
c. $3 \cdot 1{,}20 + 1{,}80 + 2 \cdot 2{,}10 = 3{,}60 + 1{,}80 + 4{,}20 = 9{,}60$ € ✓.
d. $1{,}20 + 1{,}80 + 2{,}10 = 5{,}10$ €.

Solución del ejercicio 11

a. $x + y = 20\,000$ y $0{,}03x + 0{,}05y = 840$.
b. $y = 20\,000 - x$: $0{,}03x + 1\,000 - 0{,}05x = 840$, $-0{,}02x = -160$, $x = 8\,000$ € en A y $12\,000$ € en B.
c. $\dfrac{840}{20\,000} = 0{,}042$: un 4,2 % anual.
d. $0{,}05 \cdot 20\,000 = 1\,000$ €. Probablemente el fondo B tiene más riesgo, y repartir el dinero reduce el riesgo total.

Solución del ejercicio 12

a. $y_A = 30 + 25x$; $y_B = 50 + 25x$; $y_C = 10 + 30x$.
b. $30 + 25x = 50 + 25x$ lleva a $30 = 50$, imposible: es incompatible. Las rectas son paralelas (misma pendiente): B siempre cuesta 20 € más que A.

c. $30 + 25x = 10 + 30x$ da $x = 4$ e $y = 130$. A los 4 meses A y C cuestan lo mismo, 130 €.
d. 3 meses: A 105 €, B 125 €, C 100 €: conviene C. 12 meses: A 330 €, B 350 €, C 370 €: conviene A.

Solución del ejercicio 13

a. Perímetro: $2x + 2y = 70$, es decir, $x + y = 35$. Área: $xy = 300$.
b. $y = 35 - x$: $x(35 - x) = 300$, $x^2 - 35x + 300 = 0$, $x = \dfrac{35 \pm 5}{2}$: $x = 20$ o $x = 15$.
c. Las dos soluciones dan el mismo campo: 20 m de largo y 15 m de ancho.
d. Valla: $70 \cdot 15 = 1\,050$ €. Césped: $300 \cdot 22 = 6\,600$ €. Total: $7\,650$ €.

Solución del ejercicio 14

a. $2x + y \leq 90$; $x \geq 20$; $y \geq x$.
b. $(25, 30)$: $80 \leq 90$, $25 \geq 20$ y $30 \geq 25$: sí. $(30, 35)$: $95 > 90$: no, se pasa del presupuesto.
c. $x = 20$ con $y = x$: $(20, 20)$. $x = 20$ con $2x + y = 90$: $(20, 50)$. $y = x$ con $2x + y = 90$: $3x = 90$, $(30, 30)$.
d. $x + y$ en los vértices: 40, 70 y 60. El máximo es 70 productos, con 20 bocadillos y 50 refrescos.

Solución del ejercicio 15

a. x: básicos; y: completos; z: especiales. $x + y + z = 300$; $9x + 12y + 18z = 3\,960$; $y = 2z$.
b. Sustituyendo $y = 2z$: $x + 3z = 300$ y $9x + 42z = 3\,960$. Restando nueve veces la primera: $15z = 1\,260$, $z = 84$. Luego $y = 168$ y $x = 300 - 252 = 48$.
c. $48 + 168 + 84 = 300$ ✓; $432 + 2\,016 + 1\,512 = 3\,960$ ✓; $168 = 2 \cdot 84$ ✓.
d. Coste: $48 \cdot 6 + 168 \cdot 8 + 84 \cdot 11 = 288 + 1\,344 + 924 = 2\,556$ €. Beneficio: $3\,960 - 2\,556 = 1\,404$ €.
e. Por unidad: básico 3 €, completo 4 € y especial 7 €: el especial. En total: básico 144 €, completo 672 € y especial 588 €: el completo, porque se vendieron muchos más.

Solución del ejercicio 16

a. $4x + 2y \leq 80$; $2x + 3y \leq 72$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.
b. $(10, 10)$: $60 \leq 80$ y $50 \leq 72$: sí. $(15, 12)$: $84 > 80$: no hay horas de carpintería suficientes.
c. $(0, 0)$, $(20, 0)$, $(0, 24)$ y el corte de $4x + 2y = 80$ con $2x + 3y = 72$: de la primera,

$y = 40 - 2x$; $2x + 120 - 6x = 72$, $x = 12$, $y = 16$. Vértice $(12, 16)$.

d. $B(0,0) = 0$; $B(20,0) = 1\,200$; $B(12,16) = 1\,360$; $B(0,24) = 960$. Lo más rentable: 12 mesas y 16 sillas, 1 360 €.

e. Carpintería: $48 + 32 = 80$ h; barnizado: $24 + 48 = 72$ h. Se usan todas las horas, no sobra ninguna.

Solución del ejercicio 17

a. Cuanto más caro, menos quieren comprar los consumidores (demanda decreciente) y más quieren vender los productores (oferta creciente).

b. $50 - 0{,}5q = 10 + 0{,}3q$: $40 = 0{,}8q$, $q = 50$ y $p = 25$. Equilibrio en 50 000 cajas a 25 € la caja.

c. $25 \cdot 50\,000 = 1\,250\,000$ € semanales.

d. $50 - 0{,}5q = 14 + 0{,}3q$: $36 = 0{,}8q$, $q = 45$ y $p = 50 - 22{,}5 = 27{,}50$ €.

e. El precio sube $27{,}50 - 25 = 2{,}50$ €: el consumidor paga 2,50 € de los 4 € del impuesto (el 62,5 %) y el productor el resto. El Gobierno recauda $4 \cdot 45\,000 = 180\,000$ € semanales.

Solución del ejercicio 18

a. $x + y + z = 5\,000$; $30x + 45y + 70z = 190\,000$; $x - y - z = 1\,000$.

b. Sumando la primera y la tercera: $2x = 6\,000$, $x = 3\,000$. Queda $y + z = 2\,000$ y $45y + 70z = 100\,000$. Restando 45 veces la primera: $25z = 10\,000$, $z = 400$ e $y = 1\,600$.

c. $3\,000 + 1\,600 + 400 = 5\,000$ ✓; $90\,000 + 72\,000 + 28\,000 = 190\,000$ ✓. Pista: 47,37 %; grada: 37,89 %; palco: 14,74 %.

d. $35 \cdot 3\,000 + 72\,000 + 28\,000 = 205\,000$ €, es decir, 15 000 € más.

e. Haría falta saber cómo cambia la demanda al subir el precio: si con 35 € se venden menos entradas de pista, la recaudación podría no aumentar.

Solución del ejercicio 19

a. $10x + 20y + 15z = 120$ y $20x + 10y + 15z = 120$.

b. Restando: $-10x + 10y = 0$, $y = x$. Sustituyendo: $30x + 15z = 120$, $z = 8 - 2x$. Compatible indeterminado: $(x,\ x,\ 8 - 2x)$.

c. Hace falta $x \geq 0$ y $8 - 2x \geq 0$: $0 \leq x \leq 4$. Soluciones enteras: $(0,0,8)$, $(1,1,6)$, $(2,2,4)$, $(3,3,2)$ y $(4,4,0)$.

d. $C = x + 1{,}5x + 1{,}2(8 - 2x) = 9{,}6 + 0{,}1x$. Es mínimo con $x = 0$: 8 raciones de C, que cuestan 9,60 €.

e. Todas tienen $x + y + z = 2x + 8 - 2x = 8$ raciones: como cada ración aporta en total 30 g de proteínas más hidratos y hacen falta 240 g, siempre son 8 raciones.

Solución del ejercicio 20

a. Número: $100c + 10d + u$. Inverso: $100u + 10d + c$.
b. $c + d + u = 12$; $d = c + u$; $(100c + 10d + u) - (100u + 10d + c) = 198$, que se simplifica a $99c - 99u = 198$, es decir, $c - u = 2$.
c. Sustituyendo $d = c + u$ en la primera: $2d = 12$, $d = 6$ y $c + u = 6$. Con $c - u = 2$: $c = 4$, $u = 2$. El número es 462.
d. $4 + 6 + 2 = 12$ ✓; $6 = 4 + 2$ ✓; $462 - 264 = 198$ ✓.