Apuntes - Probabilidad

Curso: 1 Bachillerato Ccss

La probabilidad cuantifica la incertidumbre: cuánto confiamos en que ocurra un suceso. Se usa en seguros, calidad industrial, diagnóstico médico, encuestas y decisiones económicas bajo riesgo.

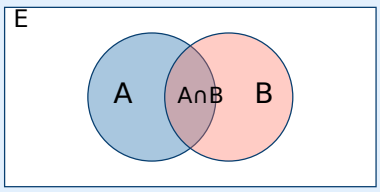
Actividad de introducción: ¿llevamos paraguas?

El servicio meteorológico anuncia «un 70 % de probabilidad de lluvia» en Bilbao para mañana. ¿Qué significa exactamente? No dice que lloverá seguro, ni que lloverá el 70 % del día: indica que, de cada 100 días con condiciones parecidas, ha llovido en unos 70. La probabilidad es un número entre 0 y 1 que mide lo seguros que estamos de que ocurra algo. Los bancos la usan para conceder préstamos, las aseguradoras para fijar el precio de los seguros, los hospitales para interpretar pruebas y las empresas para controlar la calidad. En este capítulo aprenderás a calcularla contando casos, con tablas y con diagramas de árbol, y a actualizarla cuando recibimos información nueva, como hace un médico al conocer el resultado de un análisis.

Experimentos aleatorios y sucesos

Definición: experimento, espacio muestral y suceso

Un **experimento aleatorio** tiene resultados que no se pueden predecir con certeza. El conjunto de todos los resultados posibles es el **espacio muestral** E. Un **suceso** es un subconjunto de E. El suceso **contrario** de A es $\bar{A}$ (no A); la **unión** $A \cup B$ ocurre si ocurre A o B (o ambos); la **intersección** $A \cap B$, si ocurren los dos. Dos sucesos son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.



Cálculo de probabilidades

Regla de Laplace

Si los resultados son equiprobables,

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Propiedades

- $0 \le P(A) \le 1$, $P(E) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si son incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ejemplo 1

Se lanzan dos dados. ¿Probabilidad de obtener al menos un 6?

Es más fácil por el contrario: ningún 6 tiene $\frac{25}{36}$ casos. Luego $P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$.

Probabilidad condicionada e independencia

Definición: probabilidad condicionada

La probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B (con $P(B) > 0$) es

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Regla del producto

$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = P(A)\,P(B \mid A)$. Dos sucesos son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, es decir, si $P(A \mid B) = P(A)$.

Ejemplo 2: tabla de contingencia

En un grupo de 200 personas, 120 son mujeres. Usan transporte público 60 mujeres y 30 hombres. Calcula $P(\text{mujer})$ y $P(\text{usa TP} \mid \text{mujer})$.

	Transporte público	Otro	Total
Mujeres	60	60	120
Hombres	30	50	80
Total	90	110	200

$P(\text{mujer}) = \frac{120}{200} = 0{,}6$. $P(\text{TP} \mid \text{mujer}) = \frac{60}{120} = 0{,}5$. Además $P(\text{mujer} \mid \text{TP}) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$.

Diagramas de árbol, probabilidad total y Bayes

Método: diagrama de árbol

1. Dibuja las ramas de la primera etapa con sus probabilidades.
2. De cada rama parten las de la segunda, con probabilidades *condicionadas*.
3. La probabilidad de un camino es el **producto** de sus ramas.
4. La probabilidad de un suceso es la **suma** de los caminos que lo forman.

Teorema de la probabilidad total

Si $A_1, \dots, A_n$ son incompatibles y cubren E,

$$P(B) = \sum_i P(A_i)\,P(B \mid A_i).$$

Teorema de Bayes

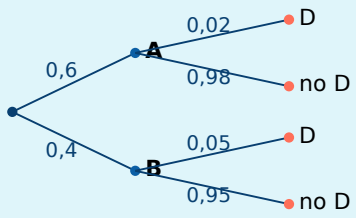
$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\,P(B \mid A_i)}{P(B)}.$$

Permite «dar la vuelta» a una probabilidad condicionada: de la causa al efecto y del efecto a la causa.

Ejemplo 3: calidad en una fábrica

La máquina A produce el 60 % de las piezas y un 2 % son defectuosas; la B produce el 40 % con un 5 % de defectuosas. ¿Probabilidad de que una pieza sea defectuosa? Si lo es, ¿probabilidad de que venga de A?

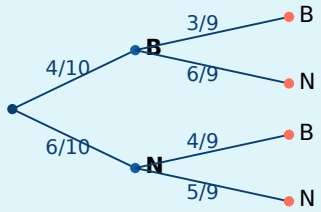
Total: $P(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}012 + 0{,}020 = 0{,}032$. Bayes: $P(A \mid D) = \dfrac{0{,}012}{0{,}032} = 0{,}375$.



Ejemplo 4: sin reemplazamiento

Una urna tiene 4 bolas blancas y 6 negras. Se extraen dos sin devolverlas. ¿Probabilidad de que sean del mismo color?

$$P = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{12+30}{90} = \frac{7}{15}.$$



Ejemplo 5: prueba diagnóstica

Una enfermedad afecta al 2 % de la población. Una prueba da positivo en el 90 % de los enfermos y en el 5 % de los sanos. Si una persona da positivo, ¿qué probabilidad hay de que esté enferma?

Probabilidad de positivo: $P(+) = 0{,}02\cdot 0{,}9 + 0{,}98\cdot 0{,}05 = 0{,}018 + 0{,}049 = 0{,}067$. Por Bayes, $P(\text{enfermo} \mid +) = \dfrac{0{,}018}{0{,}067} \approx 0{,}269$. Aunque la prueba parece fiable, solo en torno al 27 % de los positivos están realmente enfermos, porque la enfermedad es poco frecuente y los falsos positivos de los sanos (que son muchos) pesan mucho. Este resultado sorprende al principio y es un buen ejemplo de por qué conviene calcular, y no fiarse de la intuición.

¡Atención!

- Incompatibles no es lo mismo que independientes: si $P(A)$ y $P(B)$ no son nulas, dos sucesos incompatibles son *dependientes*.
- No confundas $P(A \mid B)$ con $P(B \mid A)$: en pruebas médicas son muy distintas.
- En extracciones sin reemplazamiento las probabilidades cambian en cada etapa.

Observación: probabilidad frente a frecuencia

Cuando no se pueden contar casos equiprobables, la probabilidad se estima con la **frecuencia relativa** en muchas repeticiones (ley de los grandes números). En un seguro, por ejemplo, si el 10 % de los clientes tiene un accidente al año y los años son independientes, la probabilidad de que un cliente no tenga ninguno en tres años es $0{,}9^3 = 0{,}729$.

Ampliación: técnicas y casos prácticos

Definición: tipos de sucesos

El **suceso seguro** es el propio espacio muestral E: ocurre siempre. El **suceso imposible** $\varnothing$ no ocurre nunca. Un **suceso elemental** está formado por un solo resultado. Dos sucesos son **compatibles** si pueden ocurrir a la vez e **incompatibles**

si no. Un suceso y su contrario son siempre incompatibles y, además, entre los dos cubren todo el espacio muestral.

Propiedad: leyes de De Morgan

El contrario de una unión es la intersección de los contrarios, , y el contrario de una intersección es la unión de los contrarios, . En palabras: «no ocurre ni A ni B» equivale a «no ocurre A y no ocurre B». Estas leyes permiten calcular probabilidades como «ninguno de los dos» a partir de la probabilidad de la unión.

Observación: la ley de los grandes números

Si se repite un experimento muchas veces, la **frecuencia relativa** de un suceso (número de veces que ocurre dividido entre el número de repeticiones) se acerca cada vez más a su probabilidad. Al lanzar una moneda 10 veces pueden salir 7 caras, pero al lanzarla 10 000 veces la proporción de caras estará muy cerca de 0,5. Así se estiman las probabilidades que no se pueden calcular con la regla de Laplace, por ejemplo la de que un conductor tenga un accidente o la de que una bombilla dure más de 1 000 horas.

Método: elegir la herramienta adecuada

1. Si los resultados son equiprobables y se pueden contar, usa la regla de Laplace (con el principio de multiplicación para contar).
2. Si los datos vienen clasificados según dos características, organízalos en una tabla de contingencia: las condicionadas se leen dividiendo entre el total de una fila o de una columna.
3. Si el experimento tiene varias etapas, dibuja un árbol: multiplica a lo largo de cada camino y suma los caminos que forman el suceso.
4. Si te piden la probabilidad de una causa conociendo el efecto, aplica el teorema de Bayes.
5. Si aparece «al menos uno», calcula primero la probabilidad del contrario, «ninguno».

Ejemplo 6

Se lanza una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?

Por el principio de multiplicación hay $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ resultados equiprobables. El contrario, «ninguna cara», es solo XXX, con probabilidad $\frac{1}{8}$. Por tanto, $P(\text{al menos una cara}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. Contar directamente los 7 casos favorables

también funciona, pero es más largo y es fácil olvidar alguno.

Propiedad: comprobar la independencia

Para saber si dos sucesos son independientes se comprueba una de estas igualdades equivalentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, o bien $P(A \mid B) = P(A)$. En una tabla de contingencia, la independencia significa que la proporción de una característica es la misma en todas las filas. Si A y B son independientes, también lo son A y $\bar{B}$, $\bar{A}$ y B, y $\bar{A}$ y $\bar{B}$. Cuando las repeticiones de un experimento son independientes, como lanzar varias veces un dado, las probabilidades se multiplican directamente.

Ejemplo 7

Un examen tipo test tiene 3 preguntas con 2 opciones cada una. Un alumno contesta al azar. ¿Qué probabilidad tiene de acertarlas todas?

Cada respuesta es independiente de las demás y tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ser correcta: $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Contestar al azar da muy pocas garantías.

Ejemplo 8

En una gestoría de Oviedo, el 30 % de las declaraciones de la renta son complejas. El 10 % de las complejas tiene algún error, frente al 2 % de las sencillas. Si una declaración tiene un error, ¿qué probabilidad hay de que sea compleja?

Probabilidad total: $P(\text{error}) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}02 = 0{,}03 + 0{,}014 = 0{,}044$. Bayes: $P(\text{compleja} \mid \text{error}) = \dfrac{0{,}03}{0{,}044} \approx 0{,}68$. Aunque solo el 30 % de las declaraciones son complejas, el 68 % de las que tienen errores lo son: conviene revisar con más cuidado ese tipo.

Errores frecuentes

- Aplicar la regla de Laplace cuando los resultados no son equiprobables, por ejemplo al considerar «suma 2» y «suma 7» igual de probables con dos dados.
- Sumar las probabilidades de sucesos compatibles sin restar la intersección.
- Multiplicar probabilidades de sucesos que no son independientes sin usar la condicionada.
- En un árbol, olvidar que las ramas que salen de un mismo punto deben sumar 1.
- Confundir $P(A \cap B)$, la probabilidad de que ocurran las dos cosas, con $P(A \mid B)$, que se calcula solo dentro de B.

¿Sabías que?

La teoría de la probabilidad nació en 1654 de unas cartas entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat sobre cómo repartir el dinero de una partida de dados interrumpida. Un siglo después, el reverendo Thomas Bayes escribió el teorema que lleva su nombre, publicado tras su muerte. Hoy el teorema de Bayes se usa en los filtros de correo no deseado, en el diagnóstico médico y en los sistemas que recomiendan series o canciones en las plataformas digitales.

El consejo de Otto

Ante un problema de probabilidad, dibuja siempre una tabla o un árbol: ordena los datos y evita confundir condicionadas con intersecciones.