Soluciones - Probabilidad

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{5, 6\}$.
b. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$ (par o mayor que 4); $A \cap B = \{6\}$ (par y mayor que 4); $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ (impar).
c. No son incompatibles, porque tienen un resultado común: $A \cap B = \{6\} \neq \varnothing$.
d. : ni par ni mayor que 4. Por Laplace, $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Solución del ejercicio 2

a. Hay $5 + 3 + 2 = 10$ bolas igualmente probables, así que aplicamos la regla de Laplace: $P(R) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Para «no verde» usamos el suceso contrario: $P(\bar{V}) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.
b. Roja y azul son incompatibles (una bola no puede ser de los dos colores), así que sumamos: $P(R \cup A) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$.
c. Sin devolución, la segunda extracción depende de la primera: quedan 4 rojas de 9 bolas. $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$.
d. Con reemplazamiento la urna no cambia y las extracciones son independientes: $P = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4}$, algo mayor que en c).

Solución del ejercicio 3

a. Por la fórmula de la unión, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7$. Por el suceso contrario, $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.
b. Por las leyes de De Morgan, «ni A ni B» es el contrario de la unión: . Luego $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
c. Que ocurra A pero no B es A quitando la intersección: $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$.
d. Comprobamos si el producto coincide con la intersección: $P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B)$. Sí, A y B son independientes.

Solución del ejercicio 4

a. $6 \cdot 6 = 36$ resultados, todos con probabilidad $\frac{1}{36}$, porque los dados son distintos y no están trucados.

b. Suma 7: $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$, 6 casos: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Suma 10 o más: $(4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)$, 6 casos: $\frac{1}{6}$.

c. Por el contrario: ningún 6 son $5 \cdot 5 = 25$ casos. $P = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

d. Dobles: $(1,1), \ldots, (6,6)$, 6 casos: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Solución del ejercicio 5

a. Sumamos por filas y columnas. Con mascota: $50 + 30 = 80$; sin mascota: $100 + 20 = 120$. Piso: $50 + 100 = 150$; casa: $30 + 20 = 50$. Total: 200.

b. Usamos la regla de Laplace con los totales: $P(M) = \frac{80}{200} = 0{,}4$ y $P(C) = \frac{50}{200} = 0{,}25$.

c. Al condicionar, el total pasa a ser la fila o columna conocida.
$P(M \mid C) = \frac{30}{50} = 0{,}6$: de los 50 que viven en casa, 30 tienen mascota.
$P(C \mid M) = \frac{30}{80} = 0{,}375$.

d. No son independientes, porque $P(M \mid C) = 0{,}6 \neq P(M) = 0{,}4$. Vivir en una casa aumenta la probabilidad de tener mascota.

Solución del ejercicio 6

a. Si dos sucesos son independientes, la probabilidad de la intersección es el producto: $P(A \cap B) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.

b. Fórmula de la unión: $P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}18 = 0{,}72$.

c. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3 = P(A)$. Es lógico: por ser independientes, saber que ha ocurrido B no cambia la probabilidad de A.

d. Los contrarios de sucesos independientes también son independientes: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28$. Coincide con $1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$.

Solución del ejercicio 7

a. Primera etapa: F con $\frac{4}{7}$ y L con $\frac{3}{7}$. Como Marta se come el caramelo, en la segunda quedan 6. Tras F: F con $\frac{3}{6}$ y L con $\frac{3}{6}$. Tras L: F con $\frac{4}{6}$ y L con $\frac{2}{6}$.
b. Multiplicamos las probabilidades del camino: $P(FF) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$.
c. Sumamos los caminos FF y LL: $\frac{12}{42} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{12}{42} + \frac{6}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$.
d. «Sabores distintos» es el contrario de «mismo sabor»: $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.
Comprobación: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$.

Solución del ejercicio 8

a. Practican deporte $90 + 70 + 60 + 40 = 260$ de los 400 alumnos: $P(D) = \frac{260}{400} = 0{,}65$.
b. Nos restringimos a 1.º de ESO, que tiene $90 + 30 = 120$ alumnos: $P(D \mid 1.^{\text{o}}) = \frac{90}{120} = 0{,}75$.
c. Ahora el total son los 260 que practican deporte, de los que 40 son de 2.º de Bachillerato: $P(2.^{\text{o}}\,\text{Bach} \mid D) = \frac{40}{260} = \frac{2}{13} \approx 0{,}154$.
d. Si fueran independientes, la probabilidad condicionada coincidiría con la total. Como $0{,}75 \neq 0{,}65$, no lo son: los alumnos de los primeros cursos practican más deporte que los mayores.

Solución del ejercicio 9

a. Primera etapa, la línea: L_1 (0,6) y L_2 (0,4). Segunda etapa: tras L_1, defectuoso con 0,03 y correcto con 0,97; tras L_2, defectuoso con 0,05 y correcto con 0,95.
b. Por el teorema de la probabilidad total sumamos las dos ramas que acaban en defectuoso: $P(D) = 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}018 + 0{,}020 = 0{,}038$.
c. Por el teorema de Bayes: $P(L_1 \mid D) = \frac{P(L_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}018}{0{,}038} = \frac{9}{19} \approx 0{,}4737$.
Aunque la línea 1 fabrica más, produce menos de la mitad de los defectuosos.
d. Número esperado: $10\,000 \cdot 0{,}038 = 380$ móviles defectuosos.

Solución del ejercicio 10

a. $P(+) = 0{,}02 \cdot 0{,}95 + 0{,}98 \cdot 0{,}10 = 0{,}019 + 0{,}098 = 0{,}117$.
b. $P(\text{al} \mid +) = \frac{0{,}019}{0{,}117} \approx 0{,}1624$.

c. $P(-) = 1 - 0{,}117 = 0{,}883$ y $P(\text{no al} \cap -) = 0{,}98 \cdot 0{,}90 = 0{,}882$.
$P(\text{no al} \mid -) = \dfrac{0{,}882}{0{,}883} \approx 0{,}9989$.

d. Solo un 16 % de los positivos son alérgicos: como la alergia es poco frecuente, la mayoría de los positivos son falsos positivos. Un negativo, en cambio, es muy fiable.

Solución del ejercicio 11

a. Los tiros son independientes, así que multiplicamos: $P(EE) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$.
b. La probabilidad de fallar un tiro es $1 - 0{,}8 = 0{,}2$: $P(FF) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$.
c. Hay dos caminos con un solo acierto, EF y FE: $P = 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$. Comprobación: $0{,}64 + 0{,}04 + 0{,}32 = 1$.
d. Los puntos posibles son 2, 1 y 0. La media es la suma de cada valor por su probabilidad: $2 \cdot 0{,}64 + 1 \cdot 0{,}32 + 0 \cdot 0{,}04 = 1{,}6$ puntos por pareja de tiros libres.

Solución del ejercicio 12

a. Sábado: llueve L (0,4) o seco S (0,6). Domingo, tras L: L (0,6) y S (0,4). Tras S: L (0,25) y S (0,75). Las probabilidades de cada par de ramas suman 1.
b. Probabilidad total: $P(L_D) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}25 = 0{,}24 + 0{,}15 = 0{,}39$.
c. Fin de semana seco es el camino «seco el sábado y seco el domingo»: $P = 0{,}6 \cdot 0{,}75 = 0{,}45$.
d. Teorema de Bayes: $P(L_S \mid L_D) = \dfrac{0{,}24}{0{,}39} = \dfrac{8}{13} \approx 0{,}6154$. Saber que llovió el domingo hace más probable que lloviera el sábado (pasa de 0,4 a 0,62).

Solución del ejercicio 13

a. «Al menos una» es la unión:
$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}8$.
b. No aprobar ninguna es el contrario de aprobar al menos una: $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. El 20 % suspende las dos.
c. Probabilidad condicionada: $P(E \mid M) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(M)} = \dfrac{0{,}5}{0{,}7} = \dfrac{5}{7} \approx 0{,}7143$.
d. $P(M) \cdot P(E) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42 \neq 0{,}5$: no son independientes. Aprobar Matemáticas aumenta la probabilidad de aprobar Economía, de 0,6 a 0,71.

Solución del ejercicio 14

a. Por el principio de multiplicación, cada primero se combina con cada segundo y cada postre: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ menús distintos.

b. Los menús con paella y merluza son 2, uno con cada postre. Por Laplace: $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.
c. Solo importa el segundo. Los que no son de carne son merluza y tortilla, 2 de 4: $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
d. Las elecciones son independientes, así que multiplicamos: ensalada $\frac{1}{3}$, segundo sin carne $\frac{2}{4}$, fruta $\frac{1}{2}$. $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$.

Solución del ejercicio 15

a. Usan: $240 + 270 + 90 = 600$; no usan: 400. Jóvenes: 300; adultos: 500; mayores: 200. $P(\text{usa}) = \frac{600}{1\,000} = 0{,}6$.
b. $P(\text{usa} \mid J) = \frac{240}{300} = 0{,}8$. $P(\text{usa} \mid M) = \frac{90}{200} = 0{,}45$.
c. $P(J \mid \text{usa}) = \frac{240}{600} = 0{,}4$.
d. No: $P(\text{usa} \mid J) = 0{,}8 \neq P(\text{usa}) = 0{,}6$, o bien $P(J \cap \text{usa}) = 0{,}24 \neq P(J) \cdot P(\text{usa}) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$.
e. No usan: 60 jóvenes, 230 adultos y 110 mayores. El grupo mayor es el de adultos: $P(A \mid \text{no usa}) = \frac{230}{400} = 0{,}575$. La campaña debería dirigirse a los adultos de 31 a 60 años, que son el 57,5 % de los no usuarios.

Solución del ejercicio 16

a. Primera etapa: A (0,5), B (0,3) y C (0,2). Segunda: mal estado con 0,02, 0,04 y 0,05, respectivamente.
b. $P(D) = 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}010 + 0{,}012 + 0{,}010 = 0{,}032$.
c. $P(A \mid D) = \frac{0{,}010}{0{,}032} = 0{,}3125$; $P(B \mid D) = \frac{0{,}012}{0{,}032} = 0{,}375$; $P(C \mid D) = \frac{0{,}010}{0{,}032} = 0{,}3125$. Suman 1.
d. Reclamará a B (0,375). No es el de mayor porcentaje de defectos (lo es C, con un 5 %), pero sirve más cajas que C y por eso aporta más cajas defectuosas.
e. $2\,000 \cdot 0{,}032 = 64$ cajas en mal estado, de las que se esperan $64 \cdot 0{,}375 = 24$ de B.

Solución del ejercicio 17

a. $P(5) = \frac{1}{6}$ y $P(\text{no } 5) = \frac{5}{6}$.

b. Por el contrario: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213$.
c. $(5/6)^1 \approx 0{,}8333$; $(5/6)^2 \approx 0{,}6944$; $(5/6)^3 \approx 0{,}5787$; $(5/6)^6 \approx 0{,}3349$. En seis tiradas: $1 - 0{,}3349 = 0{,}6651$. Pablo no tiene razón: hay un 33,5 % de probabilidad de no sacar ningún 5.
d. $1 - (5/6)^n \geq 0{,}9$ implica $(5/6)^n \leq 0{,}1$ y $n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln(5/6)} = 12{,}63$. Hacen falta 13 tiradas.
e. $(5/6)^n$ es siempre positivo, por muy grande que sea n, así que $1 - (5/6)^n < 1$: nunca hay certeza absoluta.

Solución del ejercicio 18

a. Por independencia: $0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$.
b. Por el contrario: no salta ninguno con $0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$. Suena con $1 - 0{,}02 = 0{,}98$.
c. $0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}26$.
d. No salta ninguno: $0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$. Suena con $1 - 0{,}006 = 0{,}994$.
e. Sin el tercer detector, la alarma falla 2 de cada 100 intrusiones; con él, 6 de cada 1 000. El fallo se divide por más de 3: merece la pena si el coste es razonable.

Solución del ejercicio 19

a. Primera etapa: Álex (0,6) y Bruno (0,4). Segunda: gol con 0,8 y 0,7; fallo con 0,2 y 0,3.
b. $P(G) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}48 + 0{,}28 = 0{,}76$.
c. $P(\text{Álex} \mid G) = \frac{0{,}48}{0{,}76} = \frac{12}{19} \approx 0{,}6316$.
d. $P(F) = 1 - 0{,}76 = 0{,}24$. $P(\text{Bruno} \cap F) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$.
$P(\text{Bruno} \mid F) = \frac{0{,}12}{0{,}24} = 0{,}5$.
e. Sería 0,8, frente a 0,76. Conviene que tire Álex más penaltis, aunque el entrenador también debe valorar el cansancio, la presión o que el portero rival no conozca a un único lanzador.

Solución del ejercicio 20

a. El segundo debe evitar 1 día y el tercero 2: $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \approx 0{,}9918$.
b. Es el contrario: $1 - 0{,}9918 = 0{,}0082$.
c. $\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$.
d. $1 - 0{,}4927 = 0{,}5073$: más de la mitad. Sorprende porque no se busca coincidir con una fecha concreta, sino que coincidan dos personas cualesquiera, y con 23

alumnos hay 253 parejas posibles.