Soluciones del examen - Polinomios, ecuaciones e inecuaciones

Curso: 1 Bachillerato Ccss · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $P(2) = 8 - 16 + 2 + 6 = 0$: por el teorema del resto, $x - 2$ es un factor de $P(x)$ y 2 es una raíz. El teorema del resto dice que $P(a)$ es el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$.

b. Coeficientes 1, -4, 1, 6 con $a = 2$: 1; $-4 + 2 = -2$; $1 - 4 = -3$; $6 - 6 = 0$. Cociente $x^2 - 2x - 3$ y resto 0. Es decir, $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$.

c. $x^2 - 2x - 3 = 0$ da $x = 3$ y $x = -1$. $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$; raíces 2, 3 y -1. Las raíces de $x^2 - 2x - 3$ salen de $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$. Comprobación: $P(3) = 27 - 36 + 3 + 6 = 0$ y $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Con $t = x^2$: $t^2 - 10t + 9 = 0$, $t = 1$ y $t = 9$. Soluciones: $x = \pm 1$ y $x = \pm 3$. Es una ecuación bicuadrada. Las raíces de $t^2 - 10t + 9 = 0$ salen de $t = \dfrac{10 \pm 8}{2}$; ambas son positivas, así que cada una da dos valores de x. Comprobación: $81 - 90 + 9 = 0$ y $1 - 10 + 9 = 0$.

b. Al cuadrado: $2x + 3 = x^2$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = 3$ o $x = -1$. Comprobación: $\sqrt{9} = 3$ ✓; $\sqrt{1} = 1 \neq -1$ ✗. Solución: $x = 3$. Elevar al cuadrado puede introducir soluciones falsas, por eso hay que comprobar en la ecuación original. Además, una raíz cuadrada nunca es negativa, lo que descarta $x = -1$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Raíces: $x = \dfrac{1 \pm 7}{2}$, 4 y -3. La parábola se abre hacia arriba: es negativa o nula entre las raíces. Solución: $[-3, 4]$. Factorizada, $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$. Los extremos se incluyen porque la desigualdad admite el 0.

b. Puntos críticos -2 (numerador) y 5 (denominador). Signos: $(-\infty, -2)$: $+$; $(-2, 5)$: $-$; $(5, +\infty)$: $+$. Solución: $(-2, 5)$. Los extremos se excluyen: en -2 el cociente vale 0, que no es negativo, y en 5 se anula el denominador. Comprobación con $x = 0$: $\dfrac{2}{-5} < 0$ ✓.

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. $\frac{1\,200}{x} - \frac{1\,200}{x+5} = 8$. Si son x amigos, cada uno paga $\frac{1\,200}{x}$; si fueran $x+5$, pagarían $\frac{1\,200}{x+5}$, y la diferencia entre ambas cantidades es de 8 €.

b. $6\,000 = 8x(x+5)$, $x^2 + 5x - 750 = 0$, $x = \frac{-5 \pm 55}{2}$: $x = 25$ amigos. Cada uno paga $1\,200 : 25 = 48$ € (con 30 pagarían 40 €, 8 € menos ✓). Multiplicando por $x(x+5)$: $1\,200(x+5) - 1\,200x = 8x(x+5)$, que se reduce a $8x^2 + 40x - 6\,000 = 0$ y, dividiendo entre 8, a $x^2 + 5x - 750 = 0$. El discriminante es $25 + 3\,000 = 3\,025 = 55^2$. La otra solución, $x = -30$, se descarta por ser negativa.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $B(5) = -25 + 300 - 500 = -225$ € (pérdidas). $B(20) = -400 + 1\,200 - 500 = 300$ €.

b. $x^2 - 60x + 500 < 0$, raíces 10 y 50. Hay beneficio si venden entre 11 y 49 quesos. Comprobación: $B(10) = -100 + 600 - 500 = 0$ y $B(50) = -2\,500 + 3\,000 - 500 = 0$.

c. Vértice $x = 30$: $B(30) = -900 + 1\,800 - 500 = 400$ €. El vértice está en $x = -\frac{60}{2 \cdot (-1)} = 30$ y es un máximo porque el coeficiente de x^2 es negativo.

d. $-x^2 + 60x - 500 \geq 300$ equivale a $x^2 - 60x + 800 \leq 0$, con raíces 20 y 40: entre 20 y 40 quesos. No compensa vender más de 40 quesos. Comprobación: $B(40) = -1\,600 + 2\,400 - 500 = 300$.