Apuntes - Polinomios, ecuaciones e inecuaciones

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Los polinomios y las ecuaciones son la herramienta básica para plantear y resolver problemas de economía: beneficios, costes, precios de equilibrio y restricciones de presupuesto. En este capítulo operarás con polinomios, los factorizarás y resolverás ecuaciones e inecuaciones de varios tipos.

Actividad de introducción: el puesto de churros

Lucía tiene un puesto de churros en la feria de su pueblo. Ha comprobado que si vende la ración a 3 € despacha 200 raciones al día, y que por cada 50 céntimos que sube el precio vende 20 raciones menos. Si sube el precio x veces 50 céntimos, ingresa $(3+0{,}5x)(200-20x)$ euros, un polinomio de segundo grado. ¿Qué precio le da más ingresos? ¿Para qué precios ingresa al menos 640 €? Para responder necesita operar con polinomios, resolver una ecuación de segundo grado y una inecuación. Estas son las herramientas de este capítulo, imprescindibles en toda la economía y en las ciencias sociales: casi cualquier modelo de costes, ingresos y beneficios acaba en una ecuación o una inecuación polinómica.

Polinomios: operaciones y división

Definición: polinomio y grado

Un **polinomio** en x es una expresión $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ con coeficientes reales. El mayor exponente con coeficiente no nulo es su **grado**.

Propiedad

Los polinomios se suman agrupando términos semejantes y se multiplican con la propiedad distributiva; el grado del producto es la suma de los grados. En la división $P(x):Q(x)$ se cumple $P=Q\cdot C+R$, con grado de R menor que el de Q.

Método: regla de Ruffini

1. Escribe los coeficientes de P (con ceros en los términos que faltan) y a la izquierda el número a del divisor $x-a$.
2. Baja el primer coeficiente.
3. Multiplica por a, suma al siguiente coeficiente y repite.
4. El último número es el resto; los anteriores son los coeficientes del cociente.

Ejemplo 1

Divide $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ entre $x - 2$.

Coeficientes 1, -6, 11, -6. Se baja el 1; $1 \cdot 2 = 2$, $-6 + 2 = -4$; $-4 \cdot 2 = -8$, $11 - 8 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$, $-6 + 6 = 0$. Cociente $x^2 - 4x + 3$ y resto 0.

Teorema del resto y factorización

Teorema del resto

El resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es $P(a)$. En particular, a es raíz de P $\iff P(a) = 0 \iff P$ es divisible por $x - a$. Las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros dividen al término independiente.

Método: factorizar un polinomio

1. Extrae factor común si lo hay.
2. Aplica identidades notables ($a^2 - b^2$, $(a \pm b)^2$).
3. Busca raíces enteras entre los divisores del término independiente y divide con Ruffini.
4. Repite con el cociente hasta factorizarlo del todo.

Ejemplo 2

Factoriza $x^3 - 7x + 6$.

Candidatos: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$, así que $x - 1$ es factor. Ruffini con 1 (coeficientes 1, 0, -7, 6) da cociente $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Resultado: $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

Ecuaciones de segundo grado y reducibles

Regla: ecuación de 2.º grado

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ se resuelve con

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta > 0$ hay dos soluciones reales, si $\Delta = 0$ una doble y si Δ ninguna real.

Propiedad: ecuaciones reducibles

- **Bicuadradas** $ax^4 + bx^2 + c = 0$: cambio $t = x^2$; después $x = \pm\sqrt{t}$ para $t \geq 0$.

- **Racionales**: se multiplica por el denominador común y se excluyen los valores que lo anulan.
- **Con radicales**: se aísla la raíz, se eleva al cuadrado y se comprueban las soluciones.
- **Exponenciales y logarítmicas**: se igualan bases ($2^{x+1} = 32 \Rightarrow x + 1 = 5$) o se usa $\log_a y = z \iff a^z = y$.

Ejemplo 3

Resuelve $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$.

Multiplicamos por $6x(x+1)$: $6(x+1) + 6x = 5x(x+1)$, o sea $5x^2 - 7x - 6 = 0$. $\Delta = 49 + 120 = 169$, $x = \frac{7 \pm 13}{10}$: $x = 2$ o $x = -\frac{3}{5}$. Ambas valen porque no anulan los denominadores.

Ejemplo 4: bicuadrada

Resuelve $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Con $t = x^2$: $t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow t = 1$ o $t = 9$. Deshaciendo el cambio, $x = \pm 1$ y $x = \pm 3$.

¡Atención!

En las ecuaciones con radicales o con denominadores hay que **comprobar siempre** las soluciones: al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas. Y de $x^2 = 9$ salen dos soluciones, $x = 3$ y $x = -3$.

Inecuaciones

Regla: sentido de la desigualdad

Una inecuación de primer grado se resuelve como una ecuación, pero **al multiplicar o dividir por un número negativo se invierte el sentido** de la desigualdad. La solución es un intervalo.

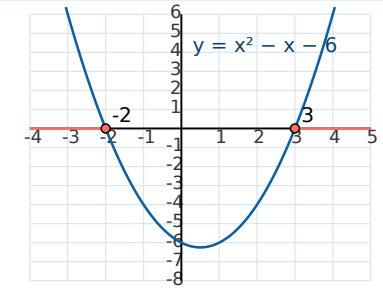
Método: inecuación de segundo grado

1. Pasa todo a un miembro y calcula las raíces del polinomio.
2. Dibuja la parábola (hacia arriba si $a > 0$).
3. Lee dónde queda por encima (> 0) o por debajo () del eje x.
4. Escribe la solución como unión de intervalos, con corchetes si la desigualdad no es estricta.

Ejemplo 5

Resuelve $x^2 - x - 6 \geq 0$.

Raíces -2 y 3. La parábola se abre hacia arriba: solución $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.



Ejemplo 6: inecuación en un contexto

Resuelve $-x^2 + 4x + 5 > 0$.

Multiplicando por -1 (y cambiando el sentido): $x^2 - 4x - 5$. Raíces -1 y 5; la parábola es negativa entre ellas. Solución $(-1, 5)$. Se comprueba con $x = 0$: $5 > 0$, cierto.

Observación

En problemas con contexto económico, la solución se contrasta con el enunciado: una longitud no puede ser negativa y un número de unidades vendidas debe ser entero y no negativo. Conviene seguir siempre los mismos pasos: leer, elegir la incógnita, plantear, resolver y comprobar. Cuando una ecuación de segundo grado modela un beneficio, sus dos raíces suelen indicar los niveles de producción en los que el beneficio es nulo (puntos de equilibrio), y la inecuación asociada indica entre qué valores compensa producir.

Ampliación: más técnicas y problemas

Propiedad: raíces enteras de un polinomio

Si un polinomio de coeficientes enteros tiene una raíz entera, esa raíz es un divisor del término independiente. Por ejemplo, las únicas posibles raíces enteras de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ son los divisores de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Se prueban con el teorema del resto o directamente con Ruffini hasta encontrar una que dé resto cero. Además, un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.

Método: factorizar un polinomio

1. Saca factor común si todos los términos tienen una potencia de x o un número común.
2. Busca identidades notables: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ y $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

3. Si es de segundo grado, resuelve la ecuación: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.
4. Si es de grado mayor, aplica Ruffini con los divisores del término independiente.
5. Repite el proceso con cada cociente hasta que todos los factores sean de primer grado o no tengan raíces reales.

Ejemplo 7

Factoriza $P(x)=2x^3-4x^2-6x$.

Factor común $2x$: $P(x)=2x(x^2-2x-3)$. La ecuación $x^2-2x-3=0$ tiene raíces $x=3$ y $x=-1$. Por tanto, $P(x)=2x(x-3)(x+1)$, con raíces 0, 3 y -1.

Método: ecuaciones racionales e irracionales

1. Racionales: multiplica los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores y resuelve la ecuación polinómica que resulta. Descarta las soluciones que anulan algún denominador.
2. Irracionales: deja la raíz sola en un miembro, eleva al cuadrado los dos miembros y resuelve. Al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones falsas: comprueba siempre cada solución en la ecuación inicial.
3. Exponenciales: escribe los dos miembros como potencias de la misma base o toma logaritmos.
4. Logarítmicas: agrupa los logaritmos con sus propiedades, iguala los argumentos y descarta las soluciones que hacen negativo algún argumento.

Ejemplo 8

Resuelve $x-\sqrt{x+1}=5$.

Aislamos la raíz: $x-5=\sqrt{x+1}$. Al cuadrado: $x^2-10x+25=x+1$, $x^2-11x+24=0$, $x=8$ o $x=3$. Comprobación: $x=8$: $8-\sqrt{9}=5$ ✓; $x=3$: $3-\sqrt{4}=1\neq 5$ ✗. La única solución es $x=8$.

Método: inecuaciones de segundo grado y racionales

1. Pasa todos los términos a un miembro para comparar con cero.
2. Calcula las raíces del numerador y del denominador: dividen la recta en intervalos.
3. Estudia el signo de la expresión en cada intervalo con un valor de prueba o con una tabla de signos.
4. Elige los intervalos que cumplen la desigualdad. Los extremos se incluyen si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$, salvo los que anulan el denominador, que nunca se incluyen.

Ejemplo 9

Resuelve $\dfrac{2x-6}{x+1} \leq 0$.

Puntos críticos: $x=3$ (numerador) y $x=-1$ (denominador). Valores de prueba: $x=-2$ da $\dfrac{-10}{-1}=10>0$; $x=0$ da $-6<0$; $x=4$ da $\dfrac{2}{5}>0$. La solución es $(-1,3]$: el 3 se incluye porque anula el numerador, y el -1 no porque anula el denominador.

Ejemplo 10

Volvamos al puesto de churros: ¿para qué subidas x ingresa Lucía al menos 640 €?

$(3+0{,}5x)(200-20x)=600+40x-10x^2$. La condición es $600+40x-10x^2 \geq 640$, es decir, $10x^2-40x+40\leq 0$, o sea, $x^2-4x+4\leq 0$, que es $(x-2)^2\leq 0$. Solo se cumple para $x=2$: con la ración a 4 € ingresa exactamente 640 €, que es además el ingreso máximo (vértice en $x=2$).

Errores frecuentes

- Dividir los dos miembros de una ecuación entre x: se pierde la solución $x=0$. Es mejor sacar factor común.
- No comprobar las soluciones de las ecuaciones irracionales y logarítmicas.
- Multiplicar una inecuación por un número negativo sin cambiar el sentido de la desigualdad.
- Multiplicar una inecuación racional por el denominador sin saber su signo: hay que usar la tabla de signos.
- En Ruffini, olvidar escribir un 0 en el lugar de los términos que faltan.

¿Sabías que?

La fórmula de la ecuación de segundo grado ya la usaban los babilonios hace casi 4 000 años para repartir tierras. La de tercer grado fue el centro de una famosa disputa en la Italia del siglo XVI: Niccolò Tartaglia la descubrió y se la confió a Gerolamo Cardano, que la publicó en 1545. Para las ecuaciones de grado cinco o superior, el joven Évariste Galois demostró que no existe una fórmula general con raíces; por eso hoy se resuelven con métodos numéricos y calculadoras.

El consejo de Otto

Si un polinomio tiene coeficientes enteros, prueba primero las raíces ± 1, ± 2, ± 3... con Ruffini; casi siempre aparece alguna enseguida.