Ejercicios - Polinomios, ecuaciones e inecuaciones

Curso: 1 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Operaciones con polinomios

Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 3$, calcula y ordena el resultado de mayor a menor grado.

a. $P(x) + Q(x)$
b. $P(x) - Q(x)$
c. $P(x) \cdot Q(x)$ e indica su grado.
d. $(x-3)^2 - (x+3)(x-3)$ usando las identidades notables.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – División y regla de Ruffini

Realiza las divisiones siguientes y comprueba el resultado con la relación $D = d \cdot c + r$.

a. $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 7) : (x - 2)$ por la regla de Ruffini.
b. Comprueba el resto del apartado anterior con el teorema del resto.
c. $(x^4 + 3x^2 - x + 2) : (x^2 + 1)$ por el método largo.
d. Comprueba la división del apartado c).

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Teorema del resto y factorización

Sea $P(x) = x^3 + kx^2 - 4x + 12$.

a. Halla k para que $P(x)$ sea divisible entre $x - 2$.
b. Con ese valor, divide $P(x)$ entre $x - 2$ por Ruffini.
c. Factoriza completamente $P(x)$.
d. Indica las raíces de $P(x)$ y calcula $P(-1)$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Factorizar polinomios

Factoriza los polinomios siguientes indicando el método empleado (factor común, identidades notables, ecuación de segundo grado o Ruffini).

a. $x^3 - 9x$
b. $x^4 - 5x^2 + 4$
c. $2x^3 - 8x^2 + 8x$
d. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Ecuaciones de segundo grado y bicuadradas

Resuelve las ecuaciones siguientes. Si alguna no tiene solución real, explica por qué.

a. $3x^2 - 12 = 0$
b. $x^2 - 7x + 10 = 0$
c. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
d. $2x^2 + 3x + 5 = 0$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Ecuaciones racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas

Resuelve las ecuaciones y comprueba siempre las soluciones obtenidas.

a. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{3}{4}$
b. $\sqrt{x+7} = x + 1$
c. $2^{x+1} + 2^x = 24$
d. $\log x + \log(x-3) = 1$

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Inecuaciones

Resuelve las inecuaciones y expresa la solución en forma de intervalo.

a. $3x - 5 \leq x + 7$
b. $x^2 - 5x + 6 < 0$
c. $x^2 - 4 \geq 0$
d. $\dfrac{x-1}{x+3} \geq 0$

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Una caja de cartón

Una empresa de embalajes de Sabadell fabrica cajas sin tapa a partir de planchas de cartón de 30 cm por 20 cm: corta un cuadrado de lado x cm en cada esquina y dobla los laterales.

a. Expresa el volumen de la caja $V(x)$ como un polinomio y desarrolla el producto.
b. Calcula el volumen para $x = 2$ y para $x = 5$.
c. ¿Entre qué valores puede estar x? Justifícalo.
d. Halla todos los valores de x para los que el volumen es de 1 000 cm³, sabiendo que $x = 5$ es uno de ellos.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Beneficios de una almazara

Una almazara cooperativa de Jaén calcula que su beneficio anual, en miles de euros, al producir x miles de litros de aceite es $B(x) = -x^2 + 90x - 1\,400$.

a. Calcula el beneficio al producir 10 000, 40 000 y 80 000 litros.
b. Resuelve la inecuación $B(x) > 0$ e interpreta la solución.
c. ¿Qué producción da el beneficio máximo? ¿Cuál es?
d. ¿Para qué producciones el beneficio es al menos de 400 000 €?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Un camino alrededor del huerto

Un huerto escolar rectangular de un colegio de Logroño mide 12 m por 8 m. Se quiere rodearlo con un camino de grava de anchura constante x de modo que el conjunto huerto más camino ocupe 165 m².

a. Escribe la ecuación que permite calcular x.
b. Resuelve la ecuación y elige la solución válida.
c. Calcula la superficie del camino.
d. Si la grava cuesta 25 € por m², ¿cuánto costará el camino?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – El autobús del viaje de estudios

Los alumnos de 1.º de Bachillerato de un instituto de Burgos alquilan un autobús por 1 800 € para su viaje de estudios, a pagar a partes iguales. Si se apuntan 10 alumnos más, cada uno pagaría 15 € menos.

a. Llama x al número inicial de alumnos y escribe el precio por alumno en los dos casos.
b. Plantea la ecuación y transfórmala en una de segundo grado.
c. Resuélvela e indica cuántos alumnos había al principio.
d. ¿Cuánto paga cada alumno en cada caso? Comprueba el resultado.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Elegir tarifa de móvil

Una estudiante de Huesca compara tres tarifas de llamadas. Tarifa A: 15 € al mes más 0,05 € por minuto. Tarifa B: 0,12 € por minuto sin cuota. Tarifa C: 25 € al mes con minutos ilimitados.

a. Escribe el coste mensual de cada tarifa si habla x minutos.
b. Resuelve la inecuación que indica cuándo A es más barata que B.
c. ¿Cuándo es C más barata que B? ¿Y más barata que A?
d. Estudia qué tarifa conviene según los minutos. ¿Hay algún consumo para el que A sea la mejor?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – La pantalla del aula

Para el aula de informática de un instituto de Huelva se busca una pantalla rectangular de 5 dm de diagonal y 12 dm² de superficie.

a. Llama x e y a los lados y escribe las dos condiciones.
b. Despeja y en la segunda y sustituye en la primera. Comprueba que se obtiene $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.
c. Resuelve esta ecuación bicuadrada.
d. ¿Qué dimensiones tiene la pantalla? ¿Cuál es su perímetro?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Dos grifos y un depósito

Para regar un invernadero de Almería se llena un depósito con dos grifos. El grifo pequeño tarda 6 horas más que el grande en llenarlo solo. Abiertos a la vez, lo llenan en 4 horas.

a. Si el grande tarda x horas, ¿qué fracción del depósito llena cada grifo en una hora?
b. Plantea la ecuación.
c. Resuélvela e indica cuánto tarda cada grifo.
d. Comprueba la solución.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – El precio de las entradas del teatro

El teatro romano de Mérida organiza una función durante el festival de verano. Con un precio de 20 € por entrada vende 600 entradas. Un estudio de mercado indica que, por cada euro que suba el precio, se venden 20 entradas menos. Llamamos x al número de euros que sube el precio. La tabla recoge algunos casos.

Subida x (€)	0	2	5	8	10
Precio (€)	20				

Subida x (€)	0	2	5	8	10
Entradas	600				
Ingresos (€)	12 000				

a. Completa la tabla de precio, entradas vendidas e ingresos para $x = 0, 2, 5, 8, 10$.
b. Escribe los ingresos $I(x)$ como un polinomio de segundo grado.
c. ¿Qué subida da los ingresos máximos? ¿Cuál es entonces el precio y cuántas entradas se venden?
d. La organización necesita ingresar al menos 12 320 €. Resuelve la inecuación correspondiente.
e. ¿Es razonable subir el precio 30 €? Justifícalo con el modelo.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Una fábrica de bicicletas

Una fábrica de bicicletas eléctricas de Vitoria estima que su beneficio mensual, en miles de euros, al fabricar x cientos de bicicletas (con $0 \leq x \leq 8$) es $B(x) = -x^3 + 10x^2 - 17x - 28$. La tabla muestra algunos valores.

x (cientos)	0	2	4	5	6	7	8
B(x) (miles €)		-30					

a. Calcula $B(0)$, $B(5)$ y $B(6)$, e interpreta $B(0)$.
b. Comprueba que $x = 4$ es raíz de $B(x)$ y divide por Ruffini.
c. Factoriza $B(x)$ completamente.
d. Estudia el signo de $B(x)$ en $[0, 8]$ y di para qué producciones hay beneficios.
e. El director propone fabricar 800 bicicletas para «vender más». ¿Qué le responderías?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Calcular el tipo de interés

Una familia de Toledo tiene dos depósitos a plazo con interés compuesto anual. En el primero ingresó 10 000 € y, al cabo de 2 años, tenía 11 025 €. En el segundo, de otro banco, ingresó 5 000 € al principio y otros 5 000 € al cabo de un año, y al final del segundo año tenía 10 918 €.

a. Llama $u = 1 + r$ al factor anual del primer depósito y plantea la ecuación.
b. Calcula el tipo de interés del primer depósito.
c. Plantea la ecuación del segundo depósito: los primeros 5 000 € están 2 años y los segundos, 1 año.
d. Resuelve la ecuación de segundo grado y calcula el tipo del segundo depósito.
e. ¿Qué banco ofrece mejor interés? ¿Cuánto habría tenido la familia si hubiera ingresado los 10 000 € del primer depósito en el segundo banco?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – La parcela de un camping

Un camping de los Pirineos quiere delimitar con 100 m de valla una parcela rectangular para tiendas de campaña. Para que quepan todas las tiendas, la superficie debe ser de al menos 600 m², y por la forma del terreno ningún lado puede medir más de 28 m. La valla cuesta 12 € por metro.

a. Si un lado mide x m, expresa el otro lado y la superficie $S(x)$.
b. Resuelve la inecuación $S(x) \geq 600$.
c. Teniendo en cuenta que ningún lado puede superar los 28 m, ¿qué valores de x son posibles?
d. ¿Qué dimensiones dan la superficie máxima permitida? Calcúlala.
e. ¿Cuánto cuesta vallar la parcela? ¿Depende de las dimensiones elegidas?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Una etapa ciclista

Una ciclista de un club de Segovia prepara una ruta de 120 km por la sierra de Guadarrama. Calcula que, si fuera 5 km/h más rápida de media, tardaría 2 horas menos. Quiere saber su velocidad media y el tiempo que necesita, porque debe volver antes de que anochezca: sale a las 9:00 y anochece a las 18:30.

a. Llama v a su velocidad media y escribe el tiempo que tarda en cada caso.
b. Plantea la ecuación y transfórmala en una de segundo grado.
c. Resuelve la ecuación.
d. ¿A qué hora llegará? ¿Le da tiempo a volver antes de que anochezca si para 1 hora a comer?
e. ¿Qué velocidad mínima necesitaría para hacer la ruta, con la parada incluida, en 8 horas? Plantea y resuelve una inecuación.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: un polinomio con dos condiciones

El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ es divisible entre $x - 1$ y entre $x + 2$.

a. Escribe las dos condiciones usando el teorema del resto.
b. Resuelve el sistema y halla a y b.
c. Factoriza $P(x)$.
d. Resuelve la inecuación $P(x) > 0$.