Soluciones - Polinomios, ecuaciones e inecuaciones

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Se suman los términos semejantes:
$2x^3+(-3+1)x^2+(1-2)x+(-4+3)=2x^3-2x^2-x-1$.
b. Se cambia el signo de Q y se suma:
$2x^3+(-3-1)x^2+(1+2)x+(-4-3)=2x^3-4x^2+3x-7$.
c. Se multiplica cada término de P por Q:
$2x^5-4x^4+6x^3-3x^4+6x^3-9x^2+x^3-2x^2+3x-4x^2+8x-12$. Agrupando:
$2x^5-7x^4+13x^3-15x^2+11x-12$, de grado $3+2=5$.
d. $(x-3)^2=x^2-6x+9$ y $(x+3)(x-3)=x^2-9$. La diferencia es
$x^2-6x+9-x^2+9=-6x+18$.

Solución del ejercicio 2

a. Coeficientes 2, -5, 4, -7 y $a=2$. Se baja el 2; $2\cdot 2=4$ y $-5+4=-1$;
$-1\cdot 2=-2$ y $4-2=2$; $2\cdot 2=4$ y $-7+4=-3$. Cociente $2x^2-x+2$ y resto -3.
b. $P(2)=2\cdot 8-5\cdot 4+4\cdot 2-7=16-20+8-7=-3$, que coincide con el resto.
c. $x^4:x^2=x^2$; restamos $x^2(x^2+1)=x^4+x^2$ y queda $2x^2-x+2$. $2x^2:x^2=2$;
restamos $2x^2+2$ y queda $-x$. Cociente x^2+2 y resto $-x$.
d. $(x^2+1)(x^2+2)+(-x)=x^4+2x^2+x^2+2-x=x^4+3x^2-x+2$ ✓.

Solución del ejercicio 3

a. Divisible entre $x-2$ significa $P(2)=0$: $8+4k-8+12=0$, es decir, $4k=-12$ y
$k=-3$.
b. Coeficientes 1, -3, -4, 12 con $a=2$: 1; $-3+2=-1$; $-4-2=-6$; $12-12=0$.
Cociente x^2-x-6.
c. $x^2-x-6=0$ da $x=\dfrac{1\pm 5}{2}$, es decir, 3 y -2. Así $P(x)=(x-2)(x-3)(x+2)$.
d. Raíces: 2, 3 y -2. $P(-1)=-1-3+4+12=12$.

Solución del ejercicio 4

a. Factor común x y diferencia de cuadrados: $x(x^2-9)=x(x-3)(x+3)$.
b. Bicuadrado: con $t=x^2$, $t^2-5t+4=0$ da $t=1$ y $t=4$. Entonces

$(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

c. Factor común $2x$ y cuadrado de una diferencia: $2x(x^2-4x+4)=2x(x-2)^2$.

d. Las posibles raíces enteras dividen a 6. $P(1)=1-2-5+6=0$; Ruffini da $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. Así $(x-1)(x-3)(x+2)$.

Solución del ejercicio 5

a. Incompleta: $x^2=4$, luego $x=2$ o $x=-2$.

b. $x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\dfrac{7\pm 3}{2}$: $x=5$ y $x=2$.

c. Con $t=x^2$: $t^2-13t+36=0$, $t=\dfrac{13\pm 5}{2}$, es decir, $t=9$ y $t=4$. Entonces $x=\pm 3$ y $x=\pm 2$: cuatro soluciones.

d. Discriminante $\Delta=9-4\cdot 2\cdot 5=-31<0$: no tiene soluciones reales.

Solución del ejercicio 6

a. Común denominador $4x(x+2)$: $4(x+2)+4x=3x(x+2)$, $8x+8=3x^2+6x$, $3x^2-2x-8=0$, $x=\dfrac{2\pm 10}{6}$: $x=2$ y $x=-\dfrac{4}{3}$. Ninguna anula los denominadores; las dos son válidas.

b. Elevamos al cuadrado: $x+7=x^2+2x+1$, $x^2+x-6=0$, $x=2$ o $x=-3$. Comprobación: $x=2$: $\sqrt{9}=3=2+1$ ✓; $x=-3$: $\sqrt{4}=2\neq -2$ ✗. Solución: $x=2$.

c. $2^{x+1}=2\cdot 2^x$, luego $3\cdot 2^x=24$, $2^x=8$ y $x=3$.

d. $\log[x(x-3)]=\log 10$, luego $x^2-3x-10=0$, con $x=5$ o $x=-2$. Como debe ser $x>3$, la única solución es $x=5$.

Solución del ejercicio 7

a. $3x-x\leq 7+5$, $2x\leq 12$, $x\leq 6$. Solución: $(-\infty,6]$.

b. Raíces: $x=2$ y $x=3$. La parábola se abre hacia arriba, así que es negativa entre las raíces: $(2,3)$.

c. Raíces ± 2; la parábola es positiva o nula fuera de ellas: $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

d. Numerador nulo en $x=1$ y denominador nulo en $x=-3$ (excluido). Tabla de signos: en $(-\infty,-3)$ el cociente es $+$; en $(-3,1)$ es $-$; en $(1,+\infty)$ es $+$. Solución: $(-\infty,-3)\cup[1,+\infty)$.

Solución del ejercicio 8

a. $V(x)=x(30-2x)(20-2x)=4x^3-100x^2+600x$ cm³.

b. $V(2) = 2 \cdot 26 \cdot 16 = 832$ cm³; $V(5) = 5 \cdot 20 \cdot 10 = 1\,000$ cm³.
c. Las medidas deben ser positivas: $x > 0$ y $20 - 2x > 0$, es decir, $0 < x < 10$.
d. $4x^3 - 100x^2 + 600x - 1\,000 = 0$, que dividido entre 4 es $x^3 - 25x^2 + 150x - 250 = 0$. Ruffini con $x = 5$ da $x^2 - 20x + 50 = 0$, con $x = 10 \pm \sqrt{50}$: $x \approx 2{,}93$ y $x \approx 17{,}07$ (no válida). Soluciones: $x = 5$ cm y $x \approx 2{,}93$ cm.

Solución del ejercicio 9

a. $B(10) = -100 + 900 - 1\,400 = -600$ (pérdidas de 600 000 €). $B(40) = -1\,600 + 3\,600 - 1\,400 = 600$. $B(80) = -6\,400 + 7\,200 - 1\,400 = -600$.
b. $-x^2 + 90x - 1\,400 > 0$ equivale a $x^2 - 90x + 1\,400 < 0$. Raíces: $x = \dfrac{90 \pm 50}{2}$, 20 y 70. Hay beneficios si se producen entre 20 000 y 70 000 litros.
c. Vértice en $x = 45$: $B(45) = 625$. Beneficio máximo de 625 000 € con 45 000 litros.
d. $-x^2 + 90x - 1\,400 \geq 400$ implica $x^2 - 90x + 1\,800 \leq 0$, con raíces 30 y 60: entre 30 000 y 60 000 litros.

Solución del ejercicio 10

a. Las dimensiones exteriores son $12 + 2x$ y $8 + 2x$: $(12 + 2x)(8 + 2x) = 165$.
b. $96 + 40x + 4x^2 = 165$, es decir, $4x^2 + 40x - 69 = 0$. $x = \dfrac{-40 \pm \sqrt{1\,600 + 1\,104}}{8} = \dfrac{-40 \pm 52}{8}$: $x = 1{,}5$ m (la solución negativa no sirve).
c. $165 - 12 \cdot 8 = 165 - 96 = 69$ m².
d. $69 \cdot 25 = 1\,725$ €.

Solución del ejercicio 11

a. Precio inicial: $\dfrac{1\,800}{x}$. Con 10 más: $\dfrac{1\,800}{x + 10}$.
b. $\dfrac{1\,800}{x} - \dfrac{1\,800}{x + 10} = 15$. Multiplicando por $x(x + 10)$: $1\,800(x + 10) - 1\,800x = 15x(x + 10)$, $18\,000 = 15x^2 + 150x$, es decir, $x^2 + 10x - 1\,200 = 0$.
c. $x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 + 4\,800}}{2} = \dfrac{-10 \pm 70}{2}$: $x = 30$ (la otra, -40, no sirve). Eran 30 alumnos.
d. Con 30: $1\,800 : 30 = 60$ €. Con 40: $1\,800 : 40 = 45$ €. La diferencia es $60 - 45 = 15$ € ✓.

Solución del ejercicio 12

a. $A(x) = 15 + 0{,}05x$; $B(x) = 0{,}12x$; $C(x) = 25$.
b. $15 + 0{,}05x < 0{,}12x$ implica $15 < 0{,}07x$, $x > 214{,}29$. Desde 215 minutos A es más barata que B.
c. C más barata que B: $25 < 0{,}12x$, $x > 208{,}33$. C más barata que A: $25 < 15 + 0{,}05x$, $x > 200$.
d. Hasta 208 minutos conviene B y desde 209 minutos conviene C. Cuando A empieza a ganar a B (215 minutos), C ya es más barata que A. Por tanto, A nunca es la mejor opción.

Solución del ejercicio 13

a. Pitágoras: $x^2 + y^2 = 25$. Superficie: $xy = 12$.
b. $y = \dfrac{12}{x}$: $x^2 + \dfrac{144}{x^2} = 25$; multiplicando por x^2: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.
c. Con $t = x^2$: $t^2 - 25t + 144 = 0$, $t = \dfrac{25 \pm 7}{2}$, es decir, $t = 16$ y $t = 9$. Entonces $x = \pm 4$ y $x = \pm 3$; solo sirven las positivas.
d. Si $x = 4$, $y = 3$; si $x = 3$, $y = 4$: es la misma pantalla de 4 dm por 3 dm. Perímetro: $2(4 + 3) = 14$ dm.

Solución del ejercicio 14

a. El grande llena $\dfrac{1}{x}$ y el pequeño $\dfrac{1}{x+6}$ del depósito por hora.
b. Juntos llenan $\dfrac{1}{4}$ por hora: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{1}{4}$.
c. Multiplicando por $4x(x+6)$: $4(x+6) + 4x = x(x+6)$, $8x + 24 = x^2 + 6x$, $x^2 - 2x - 24 = 0$, $x = \dfrac{2 \pm 10}{2}$: $x = 6$ (la otra, -4, no sirve). El grande tarda 6 h y el pequeño 12 h.
d. $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{2+1}{12} = \dfrac{1}{4}$ ✓.

Solución del ejercicio 15

a. $x = 0$: 20 €, 600 entradas, 12 000 €. $x = 2$: 22 €, 560, 12 320 €. $x = 5$: 25 €, 500, 12 500 €. $x = 8$: 28 €, 440, 12 320 €. $x = 10$: 30 €, 400, 12 000 €.
b. $I(x) = (20 + x)(600 - 20x) = 12\,000 + 200x - 20x^2$.
c. Vértice: $x = \dfrac{-200}{2 \cdot (-20)} = 5$. Precio de 25 €, 500 entradas y 12 500 € de ingresos.
d. $12\,000 + 200x - 20x^2 \geq 12\,320$ implica $20x^2 - 200x + 320 \leq 0$, es decir,

$x^2 - 10x + 16 \leq 0$, con raíces 2 y 8. Solución: $2 \leq x \leq 8$, precios entre 22 € y 28 €.

e. No: con $x = 30$ se venderían $600 - 600 = 0$ entradas y los ingresos serían 0. El modelo solo tiene sentido para $0 \leq x < 30$.

Solución del ejercicio 16

a. $B(0) = -28$: sin producir hay pérdidas de 28 000 € (costes fijos).
$B(5) = -125 + 250 - 85 - 28 = 12$ y $B(6) = -216 + 360 - 102 - 28 = 14$ miles de euros.

b. $B(4) = -64 + 160 - 68 - 28 = 0$. Ruffini con coeficientes -1, 10, -17, -28: -1; $10 - 4 = 6$; $-17 + 24 = 7$; $-28 + 28 = 0$. Cociente $-x^2 + 6x + 7$.

c. $-x^2 + 6x + 7 = 0$ equivale a $x^2 - 6x - 7 = 0$, con $x = 7$ y $x = -1$. Así $B(x) = -(x + 1)(x - 4)(x - 7)$.

d. En $[0, 8]$, $x + 1 > 0$. El signo depende de $-(x - 4)(x - 7)$: es positivo entre 4 y 7. Hay beneficios fabricando entre 400 y 700 bicicletas.

e. $B(8) = -512 + 640 - 136 - 28 = -36$: con 800 bicicletas habría pérdidas de 36 000 €. Fabricar más no siempre es mejor porque los costes crecen más deprisa que los ingresos.

Solución del ejercicio 17

a. $10\,000\,u^2 = 11\,025$.

b. $u^2 = 1{,}1025$, $u = 1{,}05$ (la negativa no sirve). Tipo: $r = 5\,\%$.

c. $5\,000u^2 + 5\,000u = 10\,918$.

d. Dividiendo entre 5 000: $u^2 + u - 2{,}1836 = 0$,
$u = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 8{,}7344}}{2} = \dfrac{-1 + 3{,}12}{2} = 1{,}06$. Tipo: $6\,\%$.

e. El segundo (6 % frente a 5 %). Habría tenido $10\,000 \cdot 1{,}06^2 = 11\,236$ €, es decir, 211 € más.

Solución del ejercicio 18

a. Perímetro $2x + 2y = 100$, luego $y = 50 - x$ y $S(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$.

b. $50x - x^2 \geq 600$ implica $x^2 - 50x + 600 \leq 0$, con raíces $x = 20$ y $x = 30$. Solución: $20 \leq x \leq 30$.

c. Debe ser $x \leq 28$ y también $50 - x \leq 28$, es decir, $x \geq 22$. Uniendo con lo anterior: $22 \leq x \leq 28$.

d. El máximo de S está en el vértice $x = 25$, que está permitido: parcela de 25×25 m y $S = 625$ m².

e. $100 \cdot 12 = 1\,200$ €. No depende de las dimensiones, porque el perímetro es siempre 100 m.

Solución del ejercicio 19

a. Tiempo real: $\frac{120}{v}$ h. Con 5 km/h más: $\frac{120}{v+5}$ h.

b. $\frac{120}{v} - \frac{120}{v+5} = 2$. Multiplicando por $v(v+5)$: $600 = 2v^2 + 10v$, es decir, $v^2 + 5v - 300 = 0$.

c. $v = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1\,200}}{2} = \frac{-5 \pm 35}{2}$: $v = 15$ km/h (la negativa no sirve). Tarda $\frac{120}{15} = 8$ h.

d. 8 h de pedaleo más 1 h de parada: llega a las 18:00, media hora antes de que anochezca.

e. $\frac{120}{v} + 1 \leq 8$ implica $\frac{120}{v} \leq 7$, $v \geq \frac{120}{7} = 17{,}14$ km/h.

Solución del ejercicio 20

a. $P(1) = 0$: $1 + a + b - 6 = 0$, es decir, $a + b = 5$. $P(-2) = 0$: $-8 + 4a - 2b - 6 = 0$, es decir, $2a - b = 7$.

b. Sumando: $3a = 12$, $a = 4$ y $b = 1$.

c. $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Ruffini con 1: cociente $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$. Así $P(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$.

d. Raíces -3, -2, 1. Signos: en $(-\infty, -3)$, $-$; en $(-3, -2)$, $+$; en $(-2, 1)$, $-$; en $(1, +\infty)$, $+$. Solución: $(-3, -2) \cup (1, +\infty)$.