Soluciones del examen - Límites y continuidad

Curso: 1 Bachillerato Ccss · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Al sustituir da $\frac{0}{0}$. $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, luego el límite es $\lim_{x\to -3}(x-2)=-5$. Es una indeterminación: hay que factorizar y simplificar el factor $x+3$, lo que es válido porque en el límite $x\neq -3$.

b. Grados iguales: $\frac{4}{2}=2$. Dividimos numerador y denominador entre x^2: $\frac{4-1/x^2}{2+1/x}\to\frac{4}{2}=2$.

c. Al sustituir da $\frac{3}{0}$. Por la izquierda $x-1<0$: $-\infty$. Por la derecha $x-1>0$: $+\infty$. No existe el límite en $x=1$. Como los límites laterales son distintos, $x=1$ es una asíntota vertical de $\frac{3}{x-1}$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. En $x=2$ resulta $\frac{7}{0}$: asíntota vertical $x=2$, con límite $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha. Por ejemplo, para $x=1{,}9$ el numerador vale 6,7 y el denominador $-0{,}1$: el cociente es muy negativo.

b. Grados iguales: $y=\frac{3}{1}=3$. Tanto en $+\infty$ como en $-\infty$ la función se acerca a 3, el cociente de los coeficientes principales.

c. Eje Y: $f(0)=-\frac{1}{2}$. Eje X: $3x+1=0$, $x=-\frac{1}{3}$. Puntos $(0,-\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{3},0)$. El signo de f cambia en $x=-\frac{1}{3}$ y en $x=2$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Izquierda: $9-k$. Derecha y valor: $2\cdot 3+1=7$. Continua si $9-k=7$, es decir, $k=2$. La función es polinómica en cada trozo, así que solo puede fallar en $x=3$. Hay que igualar el límite por la izquierda, el límite por la derecha y el valor $f(3)=7$. Con $k=2$, f es continua en todo $\mathbb{R}$.

b. g no está definida en $x=2$, pero $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$. Es una discontinuidad evitable: basta definir $g(2)=4$. El límite existe y es finito, pero no hay valor de la función: por eso es evitable y no de salto ni asintótica. En el resto de puntos g es

continua.

Solución del ejercicio 4 (3 puntos)

a. $CM(100) = \dfrac{2\,500}{100} = 25$ €. Cada uno de los 100 ejemplares sale a 25 € porque los 2 000 € fijos se reparten entre pocos.

b. Grados iguales: 5 €. Con tiradas muy grandes, el coste fijo se reparte y el coste medio se acerca al coste de cada ejemplar. Escribimos $CM(x) = 5 + \dfrac{2\,000}{x}$; el segundo sumando tiende a 0.

c. $2\,000 + 5x = 6x$ implica $x = 2\,000$ ejemplares. Planteamos $\dfrac{2\,000 + 5x}{x} = 6$ y multiplicamos por x. Comprobación: $\dfrac{2\,000 + 10\,000}{2\,000} = 6$.

Solución del ejercicio 5 (5 puntos)

a. $P(0) = \dfrac{400}{2} = 200$ conejos. $P(3) = \dfrac{4\,000}{5} = 800$; $P(8) = \dfrac{10\,000}{10} = 1\,000$.

b. Grados iguales: $\dfrac{1\,200}{1} = 1\,200$. La población se estabiliza cerca de 1 200 conejos. La recta $y = 1\,200$ es una asíntota horizontal.

c. $1\,200t + 400 = 1\,100(t + 2)$ implica $100t = 1\,800$, luego $t = 18$ años. Comprobación: $P(18) = \dfrac{22\,000}{20} = 1\,100$.

d. $1\,200 - \dfrac{2\,000}{t+2} = \dfrac{1\,200t + 2\,400 - 2\,000}{t+2} = \dfrac{1\,200t + 400}{t+2}$. Se reduce a común denominador y se agrupan los términos del numerador.

e. No: como $\dfrac{2\,000}{t+2} > 0$, $P(t) < 1\,200$ siempre. Nunca se superan los 1 200 conejos, y menos aún los 1 300. El temor no está justificado: la población crece, pero queda siempre por debajo de 1 200.