Apuntes - Límites y continuidad

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Los límites describen hacia dónde se dirige una función: qué valor se acerca a tomar cerca de un punto o a largo plazo. Con ellos se definen la continuidad y las asíntotas, y se interpreta el comportamiento de costes, concentraciones o poblaciones.

Actividad de introducción: camisetas para la carrera solidaria

El instituto organiza una carrera solidaria y encarga camisetas. El taller cobra 600 € por preparar la serigrafía y 4 € por camiseta. Si se encargan x camisetas, el coste medio es $\frac{600+4x}{x}$. Con 50 camisetas, cada una sale a 16 €; con 200, a 7 €; con 1 000, a 4,60 €; con 10 000, a 4,06 €. ¿Bajará alguna vez de 4 €? Observa que, cuantas más camisetas, más se reparten los 600 € fijos, y el coste medio se acerca cada vez más a 4 € sin llegar nunca a ese valor. Decimos que el **límite** del coste medio cuando x crece sin parar es 4. Este capítulo enseña a calcular límites como este, a encontrar las asíntotas de una gráfica y a saber si una función se puede dibujar «sin levantar el lápiz», es decir, si es continua.

Idea de límite

Definición: límite y límites laterales

El **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a a, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, es el valor al que se acercan las imágenes cuando x se aproxima a a, sin que x llegue a valer a. Los **límites laterales** $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ estudian cada lado. El límite existe solo si ambos coinciden; puede ser un número, $+\infty$ o $-\infty$.

Cálculo de límites en un punto

Regla: sustitución

En polinomios, racionales (con denominador no nulo), exponenciales y logarítmicas, el límite en un punto del dominio se calcula sustituyendo:

$\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 1) = 4 - 6 + 1 = -1.$

Método: indeterminación 0/0

1. Comprueba que la sustitución da $\frac{0}{0}$.
2. Factoriza numerador y denominador.
3. Simplifica el factor común.

4. Sustituye en la expresión simplificada.

Ejemplo 1

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

Da $\frac{0}{0}$. $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ y $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Queda $\dfrac{x+2}{x+1} \to \dfrac{3}{2}$.

Regla: k/0

Si el numerador tiende a $k \neq 0$ y el denominador a 0, no hay indeterminación: el límite es $\pm\infty$ y el signo se decide con los límites laterales. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Límites en el infinito

Regla: cociente de polinomios

Para $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $x \to \pm\infty$ se comparan los grados: si el de P es menor, el límite es 0; si son iguales, es el cociente de los coeficientes principales; si el de P es mayor, es $\pm\infty$.

Propiedad: exponenciales y logaritmos

$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ si $a>1$ y 0 si 0. $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.

Ejemplo 2

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x}{2x^2+5}$ **y** $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-3}$

Grados iguales: $\frac{3}{2}$. Numerador de menor grado: 0.

Asíntotas

Definición: asíntota

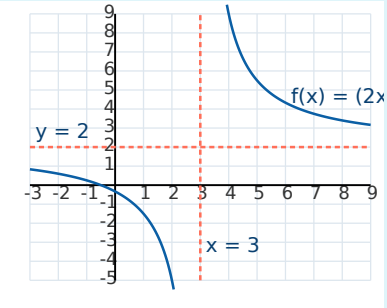
Una **asíntota** es una recta a la que se acerca la gráfica indefinidamente. Es **vertical** $x=a$ si algún límite lateral en a es infinito; **horizontal** $y=L$ si $\lim_{x\to\pm\infty} f = L$; **oblicua** $y=mx+n$ cuando el grado del numerador supera en uno al del

denominador (se obtiene dividiendo).

Ejemplo 3

Asíntotas de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

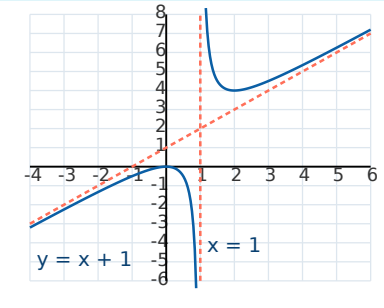
El denominador se anula en $x = 3$ y el numerador vale 7: asíntota vertical $x = 3$.
$\lim_{x\to\infty} f = 2$: asíntota horizontal $y = 2$.



Ejemplo 4: oblicua

Asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

$\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$: oblicua $y = x + 1$. Además, vertical $x = 1$.



Continuidad

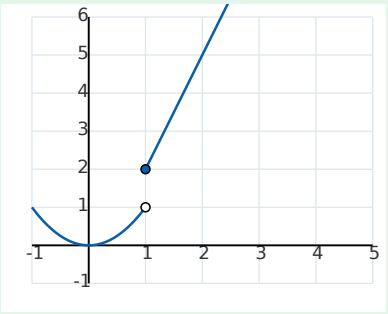
Definición: continuidad

Una función es **continua en** $x = a$ si existe $f(a)$, existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y ambos valores coinciden. Los polinomios y exponenciales son continuos en $\mathbb{R}$; las racionales, salvo donde se anula el denominador; los logaritmos, en $(0, +\infty)$.

Propiedad: tipos de discontinuidad

- **Evitable**: existe el límite pero no coincide con $f(a)$ o $f(a)$ no existe.
- **De salto**: los límites laterales existen y son distintos.

- **Asintótica**: algún límite lateral es infinito.



Ejemplo 5

. Halla k para que sea continua.

Para $x \neq 2$, $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x+2$, con límite 4 en $x=2$. Hace falta $k=4$.

Ejemplo 6: interpretación económica

Coste medio $\bar{C}(x) = \dfrac{500+2x}{x}$.

$\bar{C}(x) = \dfrac{500}{x} + 2 \to 2$ cuando $x \to \infty$: los costes fijos se diluyen y el coste medio se acerca a 2 € por unidad, asíntota horizontal.

¡Atención!

- $\frac{0}{0}$ es una indeterminación (no vale 0) y $\frac{k}{0}$ da infinito.
- Comprueba los límites laterales antes de afirmar que un límite existe.
- Donde el factor se simplifica no hay asíntota vertical, sino una discontinuidad evitable.

Observación: estudio de una racional

Para describir una función racional: calcula el dominio, los límites en las raíces del denominador (laterales, para el signo), los límites en $\pm\infty$ (asíntotas horizontales u oblicuas), y unos puntos de la gráfica con los cortes con los ejes. Con esos datos se hace un esbozo razonable.

Ampliación: técnicas y aplicaciones

Propiedad: operaciones con límites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ son finitos, entonces el límite de la suma es $L + M$, el de la diferencia es $L - M$, el del producto es $L \cdot M$ y el del cociente es L/M siempre que $M \neq 0$. También el límite de una potencia es la potencia del límite. Gracias a estas reglas, el límite de un polinomio o de una función racional en un punto de su dominio se calcula sustituyendo directamente. Las mismas reglas valen cuando x tiende a infinito.

Definición: indeterminaciones

Una **indeterminación** es un resultado que no permite conocer el límite sin hacer más cálculos, porque según la función puede valer cualquier cosa. Las más habituales en este curso son $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ y $0 \cdot \infty$. En cambio, $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$ no es una indeterminación: el límite es infinito y solo hay que averiguar el signo con los límites laterales.

Método: calcular un límite paso a paso

1. Sustituye el valor al que tiende x. Si sale un número, ese es el límite.
2. Si sale $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, el límite es infinito: estudia el signo por la izquierda y por la derecha.
3. Si sale $\frac{0}{0}$ en una racional, factoriza numerador y denominador (factor común, identidades notables o Ruffini) y simplifica.
4. Si $x \to \pm\infty$ en una racional, compara los grados: menor arriba da 0, iguales da el cociente de coeficientes principales y mayor arriba da infinito.
5. Si sale $\infty - \infty$ con raíces, multiplica y divide por la expresión conjugada.

Ejemplo 7

Calcula $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} - x\right)$**.**

Al sustituir resulta $\infty - \infty$. Multiplicamos y dividimos por el conjugado: $\frac{(x^2+4x) - x^2}{\sqrt{x^2+4x} + x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x} + x}$. Al dividir numerador y denominador entre x queda $\frac{4}{\sqrt{1+4/x} + 1} \to \frac{4}{1+1} = 2$. El límite es 2.

Propiedad: límites de funciones exponenciales

Si la base es $a > 1$, la exponencial a^x tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$ y tiende a 0 cuando $x \to -\infty$. Si la base cumple $0 < a < 1$, ocurre al revés: $a^x \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Por eso los modelos del tipo $y = K - B \cdot a^t$, con $0 < a < 1$, tienen la asíntota horizontal $y = K$: describen ventas, temperaturas o poblaciones que se estabilizan con el tiempo.

Ejemplo 8

Una aplicación de recetas de cocina tiene $U(t) = 50\,000 - 40\,000 \cdot 0{,}7^t$ usuarios tras t meses. ¿Cuántos usuarios tendrá a largo plazo?

Como $0{,}7 < 1$, $0{,}7^t \to 0$ y $U(t) \to 50\,000$. Al principio tiene $U(0) = 10\,000$ usuarios y, con el tiempo, se acerca a 50 000 sin alcanzarlos: la recta $U = 50\,000$ es una asíntota horizontal.

Definición: tipos de discontinuidad

Una función es **continua** en $x = a$ si existe $f(a)$, existe el límite en a y ambos coinciden. Cuando falla alguna condición, la discontinuidad puede ser de tres tipos. Es **evitable** si el límite existe y es finito, pero no coincide con $f(a)$ o $f(a)$ no existe: basta redefinir un punto. Es **de salto finito** si los límites laterales son finitos y distintos: la gráfica «salta» de un valor a otro, como en las tarifas por tramos. Es **de salto infinito** (o asintótica) si algún límite lateral es infinito: allí hay una asíntota vertical.

Ejemplo 9

Clasifica las discontinuidades de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ en $x = 1$ y de $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ en $x = 1$.

En f: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$, finito, pero $f(1)$ no existe: discontinuidad evitable (un «agujero» en la recta $y = x + 1$). En g: los límites laterales son $-\infty$ y $+\infty$: discontinuidad de salto infinito con asíntota vertical $x = 1$.

Regla: continuidad de las funciones elementales

Los polinomios son continuos en todo $\mathbb{R}$. Las funciones racionales son continuas en todos los puntos salvo en los que anulan el denominador. Las raíces de índice par son continuas donde el radicando es positivo o cero. Las exponenciales son continuas en todo $\mathbb{R}$ y los logaritmos en $(0, +\infty)$. Por eso, en una función a trozos solo hay que estudiar con detalle los puntos donde cambia la expresión y los puntos que no pertenecen al dominio de algún trozo.

Método: continuidad de una función a trozos

1. Comprueba que cada trozo es continuo en su intervalo.
2. En cada punto de unión, calcula el valor de la función con la expresión que incluye ese punto.
3. Calcula los límites laterales con la expresión de cada lado.
4. Si los tres valores coinciden, la función es continua; si no, clasifica la discontinuidad. Si hay un parámetro, iguala los límites laterales y resuelve la

ecuación.

Ejemplo 10

Un taxi de Madrid cobra 2,50 € de bajada de bandera y 1,10 € por kilómetro durante los primeros 10 km, y 1,30 € por kilómetro a partir del décimo. Escribe el precio y estudia si es continuo en $x = 10$.

$P(x) = 2{,}5 + 1{,}1x$ si $0 \leq x \leq 10$ y $P(x) = 13{,}5 + 1{,}3(x - 10)$ si $x > 10$. En $x = 10$: por la izquierda $2{,}5 + 11 = 13{,}5$ y por la derecha $13{,}5 + 0 = 13{,}5$. Es continua: el precio no salta al pasar del kilómetro 10, solo cambia la pendiente. Un trayecto de 15 km cuesta $13{,}5 + 1{,}3 \cdot 5 = 20$ €.

Errores frecuentes

- Escribir que $\frac{5}{0} = 0$: en realidad el límite es infinito y hay que estudiar el signo por los dos lados.
- Simplificar sin factorizar, por ejemplo tachar las x^2 en $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ como si fueran factores.
- Comparar grados en un punto finito: la regla de los grados solo sirve cuando $x \to \pm\infty$.
- Pensar que una función continua es la que «no tiene fórmula rara»: hay que comprobar los tres requisitos en cada punto dudoso.
- Olvidar los límites laterales en las funciones a trozos.

¿Sabías que?

Hace 2 500 años, el filósofo Zenón de Elea planteó la paradoja de Aquiles y la tortuga: si Aquiles debe llegar primero donde estaba la tortuga, y entonces la tortuga ya ha avanzado un poco, parece que nunca la alcanzará. La solución llegó con la idea de límite: la suma de infinitos tiempos cada vez más pequeños puede dar un tiempo finito. La definición rigurosa la escribieron Cauchy y Weierstrass en el siglo XIX. Hoy los economistas usan límites para estudiar el coste medio a largo plazo y los biólogos para estimar la población máxima que admite un ecosistema.

El consejo de Otto

Ante $\frac{0}{0}$, factoriza; ante $\frac{\infty}{\infty}$, compara grados. Casi todos los límites del curso se resuelven con una de esas dos ideas.