Ejercicios - Límites y continuidad

Curso: 1 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Límites por sustitución directa

Calcula los límites siguientes. En todos ellos la función es continua en el punto, así que basta con sustituir; explica en cada caso por qué se puede hacer.

a. $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 1)$

b. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3}{x + 4}$

c. $\lim_{x \to 4} \sqrt{x + 5}$

d. $\lim_{x \to 0} (2^x + x)$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Indeterminaciones del tipo cero entre cero

Al sustituir, los límites siguientes dan $\frac{0}{0}$. Resuélvelos factorizando numerador y denominador y simplificando el factor común.

a. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

b. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

c. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

d. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 5x}{3x}$

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Límites laterales e infinitos

Sean $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ y $g(x) = \dfrac{5}{(x + 3)^2}$.

a. Calcula $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ estudiando el signo del denominador.

b. ¿Existe $\lim_{x\to 2} f(x)$? Justifícalo.
c. Calcula los límites laterales de g en $x=-3$.
d. Indica las asíntotas verticales de las dos funciones.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Límites en el infinito

Calcula los límites comparando los grados del numerador y del denominador. Indica en cada caso el tipo de resultado.

a. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x}{x^2+4}$
b. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x^2-5}$
c. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2}{4x^2+1}$
d. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{5x-2}{1-2x}$

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Asíntotas de una función racional

Estudia la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$.

a. Calcula el dominio y las asíntotas verticales.
b. Calcula los límites laterales en cada asíntota vertical.
c. Calcula la asíntota horizontal.
d. Comprueba que $f(x)-2=\dfrac{8}{x^2-4}$ y deduce si la gráfica está por encima o por debajo de la asíntota horizontal cuando $|x|$ es grande.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Continuidad de funciones a trozos

Estudia la continuidad de las funciones siguientes en el punto donde cambia la expresión.

a. $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<2 \\ ax-1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$. Halla a para que f sea continua en $x=2$.
b. Con ese valor de a, calcula $f(0)$, $f(2)$ y $f(5)$.
c. $g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 4-x & \text{si } x>1 \end{cases}$. Calcula los límites laterales en $x=1$.
d. Clasifica la discontinuidad de g en $x=1$.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – El coste medio de las sudaderas

El instituto de Getafe encarga sudaderas con su logotipo para el viaje de fin de curso. El taller cobra 1 200 € por el diseño y la preparación de las máquinas y 3 € por cada sudadera. El coste medio por sudadera al encargar x unidades es $CM(x) = \dfrac{1\,200 + 3x}{x}$.

a. Calcula el coste medio si se encargan 100, 400 y 1 000 sudaderas.
b. Calcula $\lim_{x \to +\infty} CM(x)$ e interpreta el resultado.
c. ¿Cuántas sudaderas hay que encargar para que el coste medio no supere 5 €?
d. ¿Puede el coste medio llegar a ser de 2,50 €? Razónalo.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Un medicamento en sangre

En un ensayo clínico de un hospital de Granada, la concentración de un medicamento en sangre, en mg/L, t horas después de tomarlo es $C(t) = \dfrac{40t}{t^2 + 16}$.

a. Calcula la concentración a las 2, 4 y 10 horas.
b. Calcula $\lim_{t \to +\infty} C(t)$ e interpreta el resultado.
c. ¿En qué momentos la concentración es de 4 mg/L?
d. A la vista de los resultados, ¿en qué momento parece alcanzarse la concentración máxima?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El aparcamiento del centro

Un aparcamiento público de Bilbao cobra 2 € por la primera hora (o fracción) y 1,50 € por cada hora o fracción adicional, con un máximo de 12 € al día.

a. Calcula lo que se paga por 30 minutos, por 1 hora y por 2 horas y media.
b. Calcula los límites laterales de la función precio en $t = 1$ hora.
c. ¿Es continua la función precio? Indica dónde presenta discontinuidades y de qué tipo son.
d. ¿A partir de cuántas horas se paga la tarifa máxima?

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Truchas en un embalse

Una confederación hidrográfica repuebla un embalse de Asturias con truchas. El

número de truchas t años después es $P(t) = \dfrac{3\,000t + 500}{t + 1}$.

a. ¿Cuántas truchas se soltaron? Calcula la población a los 1, 4 y 9 años.
b. Calcula $\lim_{t \to +\infty} P(t)$. ¿Qué representa?
c. ¿Cuántos años tardará la población en llegar a 2 900 truchas?
d. Comprueba que $P(t) = 3\,000 - \dfrac{2\,500}{t + 1}$ y explica por qué la población nunca supera las 3 000 truchas.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La factura del agua por tramos

Un ayuntamiento de Castilla-La Mancha cobra el agua por tramos de consumo mensual x (en m³): $F(x) = 0{,}5x$ si $0 \le x \le 20$; $F(x) = 10 + 0{,}9(x - 20)$ si $20 < x \le 40$; $F(x) = 28 + 1{,}5(x - 40)$ si $x > 40$.

a. Calcula la factura de un hogar que consume 15 m³, 30 m³ y 50 m³.
b. Estudia la continuidad de F en $x = 20$ y en $x = 40$.
c. ¿Por qué interesa que una tarifa por tramos sea continua?
d. Una familia ha pagado 34 €. ¿Cuánta agua ha consumido?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Las ventas de un nuevo producto

Una empresa de Valencia lanza una horchata embotellada. Las ventas semanales, en miles de botellas, t semanas después del lanzamiento se estiman con $V(t) = \dfrac{200t}{t + 5}$.

a. Calcula las ventas en las semanas 5, 15 y 45.
b. Calcula el límite de las ventas a largo plazo.
c. ¿En qué semana se alcanzarán las 190 000 botellas semanales?
d. El departamento comercial afirma que «con más publicidad se venderán 250 000 botellas semanales». ¿Es coherente con el modelo?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Aprender a teclear

En una academia de informática de Córdoba, las pulsaciones por minuto que alcanza un alumno tras t semanas de curso son, de media, $N(t) = \dfrac{60t}{t + 4}$ palabras por minuto.

a. Calcula $N(1)$, $N(4)$, $N(12)$ y $N(36)$.
b. Calcula el límite de N cuando $t \to +\infty$ e interprétalo.
c. ¿Cuántas semanas hacen falta para llegar a 50 palabras por minuto?

d. Calcula cuánto mejora entre las semanas 4 y 12 y entre las semanas 12 y 36. ¿Qué observas?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Una asíntota oblicua

Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$.

a. Calcula la asíntota vertical y los límites laterales.
b. ¿Tiene asíntota horizontal? Justifícalo.
c. Divide $x^2 + 1$ entre $x - 1$ y deduce que la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.
d. Calcula $f(3)$ y compáralo con el valor de la asíntota en $x = 3$.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Limpiar un río

Una empresa de la cuenca del Ebro debe reducir los residuos que vierte al río. Los técnicos han estimado que el coste, en miles de euros, de eliminar el $p\,\%$ de los residuos es $C(p) = \dfrac{60p}{100 - p}$, con $0 \le p < 100$. La empresa dispone de un presupuesto de 360 000 € y la administración le exige eliminar al menos el 80 %. La tabla recoge algunos valores.

% eliminado	50	80	90	95
Coste (miles €)				

a. Completa la tabla: calcula el coste de eliminar el 50 %, el 80 %, el 90 % y el 95 %.
b. Calcula $\lim_{p \to 100^-} C(p)$ e interpreta el resultado.
c. ¿Qué porcentaje máximo puede eliminar con su presupuesto?
d. ¿Cumple la exigencia de la administración? ¿Cuánto dinero le sobra al eliminar exactamente el 80 %?
e. Un ecologista pide eliminar el 100 % de los residuos. ¿Es posible según el modelo? Razónalo.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Una tarifa eléctrica sin saltos

Una comercializadora eléctrica diseña para pequeños comercios de Zaragoza una tarifa mensual (en euros) según los kWh consumidos x: $F(x) = 0{,}20x$ si $0 \le x \le 100$; $F(x) = a + 0{,}15x$ si $100 < x \le 300$; $F(x) = b + 0{,}12x$ si $x > 300$. La empresa quiere que la tarifa sea continua para que ningún cliente pague mucho más por consumir un

poco más.

a. Halla a para que F sea continua en $x = 100$.
b. Halla b para que F sea continua en $x = 300$.
c. Calcula la factura de una tienda que consume 250 kWh y la de otra que consume 400 kWh.
d. Calcula el precio medio por kWh de la tienda que consume 400 kWh.
e. Calcula $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$ y explica su significado para los grandes consumidores.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Suscriptores de una plataforma

Una plataforma de pódcast en español con sede en Barcelona tenía 1 000 suscriptores de pago al empezar una campaña. Los analistas estiman que, t meses después, el número de suscriptores será $S(t) = 8\,000 - 7\,000 \cdot 0{,}8^{t}$. Cada suscriptor paga 9 € al mes. La tabla recoge la previsión de algunos meses.

Mes t	0	3	6	12
Suscriptores S(t)	1 000			

a. Comprueba que $S(0) = 1\,000$ y calcula $S(3)$, $S(6)$ y $S(12)$ redondeando a unidades.
b. Calcula $\lim_{t \to +\infty} S(t)$ justificando qué le ocurre a $0{,}8^{t}$.
c. ¿A partir de qué mes se superarán los 7 000 suscriptores?
d. ¿Qué ingreso mensual máximo puede esperar la plataforma a largo plazo?
e. La dirección quiere llegar a 10 000 suscriptores con esta campaña. ¿Es realista? Razónalo.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Enviar un paquete

Una empresa de mensajería de Sevilla cobra los envíos nacionales según el peso x del paquete en kilogramos: 4 € hasta 1 kg; 6,50 € si pesa más de 1 kg y hasta 2 kg; 9 € si pesa más de 2 kg y hasta 5 kg; y, por encima de 5 kg, 9 € más 1,20 € por cada kilogramo que pase de 5. La tabla resume las tarifas.

Peso	hasta 1 kg	de 1 a 2 kg	de 2 a 5 kg	más de 5 kg
Precio	4 €	6,50 €	9 €	9 € + 1,20 €/kg

a. Escribe la función precio $P(x)$ a trozos.
b. Calcula el precio de paquetes de 0,8 kg, 1,5 kg, 4 kg y 7,5 kg.
c. Calcula los límites laterales en $x = 1$, $x = 2$ y $x = 5$.
d. Indica en qué puntos es discontinua la función y de qué tipo es cada discontinuidad.

e. Un cliente tiene dos paquetes de 1 kg y 1,2 kg. ¿Le conviene enviarlos por separado o juntos? Razónalo.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Un café que se enfría

En una cafetería de Salamanca se sirve un café a 90 °C en una sala que está a 20 °C. Su temperatura t minutos después es $T(t) = 20 + 70 \cdot 0{,}9^t$ grados. Un cliente prefiere tomarlo cuando está a 50 °C o menos, pero no por debajo de 35 °C. La tabla recoge varias mediciones.

t (min)	0	5	10	20
T (°C)	90			28,5

a. Calcula la temperatura a los 5 y a los 10 minutos.
b. Calcula $\lim_{t \to +\infty} T(t)$ e interprétalo físicamente.
c. ¿Cuántos minutos tarda en bajar a 50 °C?
d. ¿Cuántos minutos tarda en bajar a 35 °C? ¿Durante cuánto tiempo está el café a gusto del cliente?
e. ¿Puede llegar el café a 15 °C si se deja en la sala? Justifícalo.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: elegir los parámetros

Se define $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 2}$ si $x \neq 2$ y $f(2) = 5$.

a. Explica por qué, para que f sea continua en $x = 2$, el numerador debe anularse en $x = 2$. Escribe la ecuación que deben cumplir a y b.
b. Si el numerador se anula en $x = 2$, se puede escribir como $(x - 2)(x - c)$. Calcula el límite en función de c.
c. Halla a, b y c para que f sea continua en $x = 2$.
d. Con esos valores, calcula $f(3)$ y estudia si f tiene asíntotas.