Soluciones - Límites y continuidad

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Es un polinomio, continuo en todo $\mathbb{R}$: $3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$.
b. Es una función racional y el denominador no se anula en $x = -1$ ($-1 + 4 = 3 \neq 0$): $\dfrac{(-1)^2 + 3}{-1 + 4} = \dfrac{4}{3}$.
c. El radicando es positivo en $x = 4$: $\sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$.
d. La exponencial y el polinomio son continuos: $2^0 + 0 = 1 + 0 = 1$.

Solución del ejercicio 2

a. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, luego $\dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$ y el límite es $3 + 3 = 6$.
b. $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ y $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Queda $\dfrac{x + 3}{x + 1}$, que en $x = 1$ vale $\dfrac{4}{2} = 2$.
c. Por Ruffini, $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$. Queda $x^2 - 2x + 4$, que en $x = -2$ vale $4 + 4 + 4 = 12$.
d. Factor común: $\dfrac{x(x + 5)}{3x} = \dfrac{x + 5}{3}$, que en $x = 0$ vale $\dfrac{5}{3}$.

Solución del ejercicio 3

a. Al sustituir se obtiene $\frac{3}{0}$. Si $x \to 2^-$ (por ejemplo $x = 1{,}99$), $x - 2$ es negativo y muy pequeño: el límite es $-\infty$. Si $x \to 2^+$ ($x = 2{,}01$), $x - 2$ es positivo: el límite es $+\infty$.
b. No existe, porque los límites laterales son distintos ($-\infty$ y $+\infty$).
c. $(x + 3)^2$ es siempre positivo, así que $\dfrac{5}{(x + 3)^2} \to +\infty$ por los dos lados y $\lim\limits_{x \to -3} g(x) = +\infty$.
d. f tiene la asíntota vertical $x = 2$ y g la asíntota vertical $x = -3$.

Solución del ejercicio 4

a. Grados iguales (2 y 2): el límite es el cociente de los coeficientes principales,

$\frac{3}{1} = 3$.

b. Grado del numerador (1) menor que el del denominador (2): el límite es 0.
c. Grado del numerador (3) mayor que el del denominador (2): el límite es infinito; como los coeficientes principales son positivos, es $+\infty$.
d. Grados iguales: $\frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$. Para $x \to -\infty$ se aplica la misma regla.

Solución del ejercicio 5

a. $x^2 - 4 = 0$ para $x = \pm 2$. $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. En los dos puntos el numerador vale $8 \neq 0$: hay asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 2$.
b. En $x = 2$: por la izquierda $x^2 - 4 < 0$, límite $-\infty$; por la derecha, $+\infty$. En $x = -2$: por la izquierda ($x = -2{,}01$) $x^2 - 4 > 0$, límite $+\infty$; por la derecha, $-\infty$.
c. Grados iguales: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$. Asíntota horizontal $y = 2$.
d. $f(x) - 2 = \frac{2x^2 - 2(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{8}{x^2 - 4}$. Si $|x| > 2$, el denominador es positivo y la diferencia también: la gráfica está por encima de $y = 2$.

Solución del ejercicio 6

a. Límite por la izquierda: $2^2 + 1 = 5$. Límite por la derecha y valor: $2a - 1$. Continua si $2a - 1 = 5$, es decir, $a = 3$.
b. $f(0) = 0^2 + 1 = 1$; $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$; $f(5) = 3 \cdot 5 - 1 = 14$.
c. Por la izquierda: $1 + 1 = 2$. Por la derecha: $4 - 1 = 3$.
d. Los dos límites laterales son finitos pero distintos: discontinuidad de salto finito, con un salto de $3 - 2 = 1$ unidad.

Solución del ejercicio 7

a. $CM(100) = \frac{1\,500}{100} = 15$ €; $CM(400) = \frac{2\,400}{400} = 6$ €; $CM(1\,000) = \frac{4\,200}{1\,000} = 4{,}20$ €.
b. Grados iguales: $\frac{3}{1} = 3$. Cuantas más sudaderas, más se reparte el coste fijo y el coste medio se acerca a 3 € (el coste de cada sudadera).
c. $\frac{1\,200 + 3x}{x} \leq 5$ implica $1\,200 + 3x \leq 5x$, es decir, $x \geq 600$ sudaderas.
d. No: $CM(x) = 3 + \frac{1\,200}{x}$ es siempre mayor que 3 €, así que nunca baja de 3 € y mucho menos llega a 2,50 €.

Solución del ejercicio 8

a. $C(2) = \dfrac{80}{20} = 4$ mg/L; $C(4) = \dfrac{160}{32} = 5$ mg/L; $C(10) = \dfrac{400}{116} = 3{,}45$ mg/L.
b. El grado del denominador (2) es mayor que el del numerador (1): el límite es 0. Con el tiempo el organismo elimina el medicamento.
c. $\dfrac{40t}{t^2+16} = 4$ implica $4t^2 - 40t + 64 = 0$, es decir, $t^2 - 10t + 16 = 0$, con soluciones $t = 2$ h y $t = 8$ h.
d. La concentración vale 4 a las 2 y a las 8 horas y es mayor entre ambas (5 a las 4 h): el máximo está hacia las 4 horas, en el punto medio entre 2 y 8.

Solución del ejercicio 9

a. 30 min: 2 €. 1 h: 2 € (la primera hora completa). 2,5 h: se cobran 3 horas, $2 + 1{,}5 \cdot 2 = 5$ €.
b. Por la izquierda (algo menos de 1 h) se pagan 2 €; por la derecha (algo más de 1 h) se pagan $2 + 1{,}5 = 3{,}50$ €.
c. No es continua: tiene discontinuidades de salto finito (salto de 1,50 €) en $t = 1, 2, 3, \ldots$ hasta llegar al máximo. Es una función escalonada.
d. Hasta 7 horas se pagan $2 + 1{,}5 \cdot 6 = 11$ €. Más de 7 horas costaría $2 + 1{,}5 \cdot 7 = 12{,}50$ €, que supera el máximo: a partir de 7 horas se pagan 12 €.

Solución del ejercicio 10

a. $P(0) = 500$ truchas. $P(1) = \dfrac{3\,500}{2} = 1\,750$; $P(4) = \dfrac{12\,500}{5} = 2\,500$; $P(9) = \dfrac{27\,500}{10} = 2\,750$.
b. Grados iguales: $\dfrac{3\,000}{1} = 3\,000$. Es la capacidad máxima del embalse: la población se estabiliza cerca de 3 000 truchas.
c. $3\,000t + 500 = 2\,900(t+1)$ implica $100t = 2\,400$, luego $t = 24$ años.
d. $3\,000 - \dfrac{2\,500}{t+1} = \dfrac{3\,000t + 3\,000 - 2\,500}{t+1} = \dfrac{3\,000t + 500}{t+1}$. Como $\dfrac{2\,500}{t+1} > 0$, $P(t)$ es siempre menor que 3 000.

Solución del ejercicio 11

a. $F(15) = 7{,}50$ €; $F(30) = 10 + 0{,}9 \cdot 10 = 19$ €; $F(50) = 28 + 1{,}5 \cdot 10 = 43$ €.
b. En $x = 20$: por la izquierda $0{,}5 \cdot 20 = 10$ y por la derecha $10 + 0 = 10$; continua.
En $x = 40$: por la izquierda $10 + 0{,}9 \cdot 20 = 28$ y por la derecha 28; continua.
c. Si hubiera un salto, consumir 1 litro más podría encarecer mucho la factura. Con

una tarifa continua, un pequeño aumento de consumo produce un pequeño aumento del precio.

d. 34 € es más de 28 €, luego está en el tercer tramo: $28 + 1{,}5(x - 40) = 34$ implica $x - 40 = 4$ y $x = 44$ m³.

Solución del ejercicio 12

a. $V(5) = \dfrac{1\,000}{10} = 100$; $V(15) = \dfrac{3\,000}{20} = 150$; $V(45) = \dfrac{9\,000}{50} = 180$ miles de botellas.

b. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{200t}{t + 5} = 200$: las ventas se estabilizan en 200 000 botellas semanales (saturación del mercado).

c. $200t = 190(t + 5)$ implica $10t = 950$, luego $t = 95$ semanas.

d. No con este modelo: las ventas nunca alcanzan 200 000. Para llegar a 250 000 haría falta cambiar las condiciones del mercado y, por tanto, el modelo.

Solución del ejercicio 13

a. $N(1) = \dfrac{60}{5} = 12$; $N(4) = \dfrac{240}{8} = 30$; $N(12) = \dfrac{720}{16} = 45$; $N(36) = \dfrac{2\,160}{40} = 54$.

b. Grados iguales: el límite es 60. Es la velocidad máxima a la que tiende un alumno con mucha práctica.

c. $60t = 50(t + 4)$ implica $10t = 200$, luego $t = 20$ semanas.

d. De 4 a 12 semanas mejora $45 - 30 = 15$ palabras; de 12 a 36, solo $54 - 45 = 9$ en el triple de tiempo. Cada vez cuesta más mejorar, porque la función se acerca a su asíntota.

Solución del ejercicio 14

a. $x - 1 = 0$ para $x = 1$ y el numerador vale $2 \neq 0$: asíntota vertical $x = 1$. Por la izquierda $\frac{2}{0^-} = -\infty$; por la derecha $+\infty$.

b. No: el grado del numerador (2) es mayor que el del denominador (1) y el límite en el infinito es infinito.

c. Cociente $x + 1$ y resto 2: $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x - 1}$. Como $\dfrac{2}{x - 1} \to 0$ en el infinito, la gráfica se acerca a la recta $y = x + 1$.

d. $f(3) = \dfrac{10}{2} = 5$ y la asíntota da $3 + 1 = 4$. La gráfica está por encima (diferencia $\frac{2}{2} = 1$).

Solución del ejercicio 15

a. $C(50) = \dfrac{3\,000}{50} = 60$; $C(80) = \dfrac{4\,800}{20} = 240$; $C(90) = \dfrac{5\,400}{10} = 540$; $C(95) = \dfrac{5\,700}{5} = 1\,140$ miles de euros.

b. Al acercarse p a 100 por la izquierda, el numerador tiende a 6 000 y el denominador a 0^+: el límite es $+\infty$. Eliminar casi todos los residuos cuesta cada vez más.

c. $\dfrac{60p}{100-p} = 360$ implica $60p = 36\,000 - 360p$, $420p = 36\,000$ y $p = 85{,}71\,\%$.

d. Sí, porque $85{,}71\,\% \geq 80\,\%$. Al eliminar el 80 % gasta 240 000 € y le sobran $360\,000 - 240\,000 = 120\,000$ €.

e. No: $p = 100$ anula el denominador, la función no está definida y hay una asíntota vertical. El coste crece sin límite cuando p se acerca a 100.

Solución del ejercicio 16

a. Por la izquierda: $0{,}2 \cdot 100 = 20$. Por la derecha: $a + 15$. Continua si $a + 15 = 20$, luego $a = 5$.

b. Por la izquierda: $5 + 0{,}15 \cdot 300 = 50$. Por la derecha: $b + 36$. Continua si $b + 36 = 50$, luego $b = 14$.

c. $F(250) = 5 + 0{,}15 \cdot 250 = 42{,}50$ €. $F(400) = 14 + 0{,}12 \cdot 400 = 62$ €.

d. $\dfrac{62}{400} = 0{,}155$ €/kWh.

e. $\dfrac{14 + 0{,}12x}{x} = 0{,}12 + \dfrac{14}{x} \to 0{,}12$. Para consumos muy grandes, el precio medio se acerca a 0,12 €/kWh, el precio del último tramo.

Solución del ejercicio 17

a. $S(0) = 8\,000 - 7\,000 = 1\,000$. $S(3) = 8\,000 - 7\,000 \cdot 0{,}512 = 4\,416$; $S(6) = 8\,000 - 7\,000 \cdot 0{,}262144 \approx 6\,165$; $S(12) = 8\,000 - 7\,000 \cdot 0{,}068719 \approx 7\,519$.

b. Como $0 < 0{,}8 < 1$, $0{,}8^t \to 0$ cuando $t \to +\infty$, y por tanto $S(t) \to 8\,000$ suscriptores.

c. $8\,000 - 7\,000 \cdot 0{,}8^t > 7\,000$ implica $0{,}8^t < \dfrac{1}{7}$. Tomando logaritmos: $t > \dfrac{\ln 7}{\ln 1{,}25} = 8{,}72$. Se superan a partir del mes 9.

d. A largo plazo: $8\,000 \cdot 9 = 72\,000$ € mensuales como máximo.

e. No: el modelo tiene la asíntota horizontal $S = 8\,000$ y nunca la supera. Para llegar a 10 000 haría falta otra campaña o un modelo distinto.

Solución del ejercicio 18

a. $P(x) = 4$ si $0 < x \leq 1$; 6,5 si $1 < x \leq 2$; 9 si $2 < x \leq 5$; $9 + 1{,}2(x-5)$ si $x > 5$.
b. $P(0{,}8) = 4$ €; $P(1{,}5) = 6{,}50$ €; $P(4) = 9$ €; $P(7{,}5) = 9 + 1{,}2 \cdot 2{,}5 = 12$ €.
c. En $x = 1$: 4 por la izquierda y 6,5 por la derecha. En $x = 2$: 6,5 y 9. En $x = 5$: 9 por la izquierda y $9 + 1{,}2 \cdot 0 = 9$ por la derecha.
d. Es discontinua en $x = 1$ y $x = 2$ (saltos finitos de 2,50 €). En $x = 5$ es continua, porque los límites laterales coinciden con $P(5) = 9$.
e. Por separado: $4 + 6{,}50 = 10{,}50$ €. Juntos pesan 2,2 kg: 9 €. Le conviene enviarlos juntos y ahorra 1,50 €.

Solución del ejercicio 19

a. $T(5) = 20 + 70 \cdot 0{,}59049 = 61{,}33$ °C. $T(10) = 20 + 70 \cdot 0{,}348678 = 44{,}41$ °C.
b. $0{,}9^t \to 0$, así que $T(t) \to 20$ °C: el café acaba a la temperatura de la sala.
c. $70 \cdot 0{,}9^t = 30$ implica $0{,}9^t = \dfrac{3}{7}$ y $t = \dfrac{\ln(3/7)}{\ln 0{,}9} = 8{,}04$ minutos.
d. $70 \cdot 0{,}9^t = 15$ implica $t = \dfrac{\ln(15/70)}{\ln 0{,}9} = 14{,}62$ minutos. Lo tomará a gusto durante unos $14{,}62 - 8{,}04 = 6{,}58$ minutos.
e. No: $70 \cdot 0{,}9^t$ es siempre positivo, luego $T(t) > 20$ °C. La recta $T = 20$ es una asíntota horizontal que la gráfica nunca cruza.

Solución del ejercicio 20

a. Si el numerador no se anulara, al acercarse a 2 resultaría $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$, es decir, un límite infinito y nunca 5. Debe ser $4 + 2a + b = 0$.
b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-c)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x - c) = 2 - c$.
c. $2 - c = 5$ da $c = -3$. El numerador es $(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$, luego $a = 1$ y $b = -6$ (y se cumple $4 + 2 - 6 = 0$).
d. $f(3) = \dfrac{9 + 3 - 6}{1} = 6$. En realidad $f(x) = x + 3$ para todo x: es una recta, sin asíntotas.