Soluciones del examen - Funciones elementales

Curso: 1 Bachillerato Ccss · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. En f el denominador no puede anularse: $x^2 - 4x = x(x-4) = 0$ para $x = 0$ y $x = 4$, así que $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$. En g el radicando debe ser no negativo: $6 - 2x \geq 0$ implica $x \leq 3$, luego $\mathrm{Dom}\, g = (-\infty, 3]$.

b. Pendiente: $m = \dfrac{9-1}{6-2} = 2$. Con el punto $(2, 1)$: $y - 1 = 2(x-2)$, es decir, $y = 2x - 3$. Comprobación con el otro punto: $2 \cdot 6 - 3 = 9$.

c. Eje Y: con $x = 0$ se obtiene el punto $(0, -3)$. Eje X: $2x - 3 = 0$ da $x = 1{,}5$, punto $(1{,}5; 0)$. Comprobación: $2 \cdot 1{,}5 - 3 = 0$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Abscisa del vértice: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$, y $f(3) = -9 + 18 - 5 = 4$. El vértice es $(3, 4)$; como $a = -1 < 0$, la parábola se abre hacia abajo y es un máximo.

b. Eje Y: $f(0) = -5$, punto $(0, -5)$. Eje X: $-x^2 + 6x - 5 = 0$ equivale a $x^2 - 6x + 5 = 0$, con soluciones $x = 1$ y $x = 5$: puntos $(1, 0)$ y $(5, 0)$.

c. $f(0) = -5$; $f(1) = 0$; $f(2) = 3$; $f(3) = 4$; $f(4) = 3$; $f(5) = 0$; $f(6) = -5$. La parábola se abre hacia abajo, crece hasta $x = 3$, decrece después y es simétrica respecto de la recta $x = 3$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Escribimos 81 como potencia de 3: $3^{x+1} = 3^4$. Igualando exponentes, $x + 1 = 4$, luego $x = 3$. Comprobación: $3^{3+1} = 3^4 = 81$.

b. Por la definición de logaritmo, $x - 1 = 2^4 = 16$, luego $x = 17$. Es válida porque $x - 1 > 0$. Comprobación: $\log_2 16 = 4$.

c. Tomamos logaritmos neperianos: $x \ln 5 = \ln 20$, así que $x = \dfrac{\ln 20}{\ln 5} = \dfrac{2{,}9957}{1{,}6094} = 1{,}861$. También vale con logaritmos decimales, pues el cociente no depende de la base. Comprobación: $5^{1{,}861} \approx 20$.

d. La suma de logaritmos es el logaritmo del producto: $\log 4 + \log 25 = \log(4 \cdot 25) = \log 100 = 2$. En efecto, $10^2 = 100$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Cada tarifa es una función afín: parte fija más precio por clase. $A(x) = 30 + 12x$ y $B(x) = 90 + 8x$.
b. Igualamos: $30 + 12x = 90 + 8x$, luego $4x = 60$ y $x = 15$ clases. Con 15 clases las dos cuestan $30 + 180 = 210$ €.
c. Con 10 clases: $A = 30 + 120 = 150$ € y $B = 90 + 80 = 170$ €, conviene A. Con 25 clases: $A = 330$ € y $B = 290$ €, conviene B. En general, A conviene por debajo de 15 clases y B por encima.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $U(2) = 400 \cdot 1{,}25^2 = 400 \cdot 1{,}5625 = 625$ usuarios y $U(4) = 400 \cdot 1{,}25^4 = 400 \cdot 2{,}4414 = 976$ usuarios.
b. Planteamos $400 \cdot 1{,}25^t = 1000$, es decir, $1{,}25^t = 2{,}5$. Con logaritmos, $t = \dfrac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}25} = \dfrac{0{,}9163}{0{,}2231} = 4{,}11$ meses. Como $U(4) = 976$ y $U(5) = 400 \cdot 1{,}25^5 \approx 1221$, los 1 000 usuarios se superan durante el quinto mes.
c. Vértice: $x = \dfrac{4}{2 \cdot 0{,}002} = 1\,000$. Coste mínimo: $C(1000) = 2\,000 - 4\,000 + 3\,000 = 1\,000$ €. Con $x \leq 1000$ el coste decrece mientras crece el número de usuarios. Aquí el coeficiente de x^2 es $0{,}002 > 0$, así que la parábola tiene un mínimo en el vértice.
d. $C(400) = 320 - 1\,600 + 3\,000 = 1\,720$ € y $C(1000) = 1\,000$ €. Cuantos más usuarios, menor coste: la aplicación es más rentable cuanto más se usa.