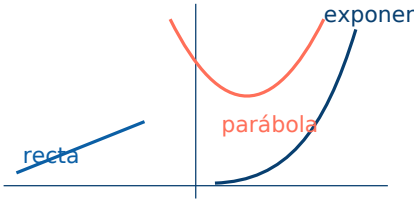
Apuntes - Funciones elementales

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Una función describe cómo depende una magnitud de otra: el coste de las unidades fabricadas, el ingreso del precio, la población del tiempo. Conocer las funciones elementales (recta, parábola, exponencial y logaritmo) permite modelar la mayoría de situaciones económicas del curso.

Actividad de introducción: ¿qué función describe cada situación?

Piensa en tres situaciones. Un taxi cobra una bajada de bandera fija y una cantidad por kilómetro: el precio crece de forma lineal. Un balón lanzado a canasta sube, alcanza una altura máxima y baja: describe una parábola. Un capital en el banco con interés compuesto, o un cultivo de bacterias, crece cada vez más deprisa: es una función exponencial. Y si queremos saber cuánto tiempo necesitamos para que el capital llegue a cierta cantidad, la herramienta que hace falta es el logaritmo, que es la función inversa de la exponencial. Reconocer qué familia de funciones se ajusta a cada fenómeno, y conocer sus propiedades (dominio, cortes, crecimiento, vértice, asíntotas), es la base de la modelización matemática en economía, biología o física.



Función, dominio y recorrido

Definición: función, dominio y recorrido

Una **función** f asigna a cada valor x de su **dominio** un único valor $y = f(x)$. El conjunto de los valores que toma y es el **recorrido**.

Método: hallar el dominio

1. Excluye los valores que anulan un denominador.
2. Exige radicando mayor o igual que 0 en las raíces cuadradas.
3. Exige argumento mayor que 0 en los logaritmos.

Ejemplo 1

Dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $g(x) = \sqrt{x+4}$, $h(x) = \log(x-1)$.

f: $x \neq 3$. g: $x + 4 \geq 0 \Rightarrow [-4, +\infty)$. h: $x - 1 > 0 \Rightarrow (1, +\infty)$.

Función lineal y afín

Definición: recta

La función $f(x) = mx + n$ tiene como gráfica una recta. m es la **pendiente** (cuánto cambia y cuando x aumenta una unidad) y n la **ordenada en el origen**.

Regla

Si $m > 0$ crece y si m decrece. Por dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) pasa la recta de pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ejemplo 2: tarifa de gas

8 € fijos más 0,06 € por kWh. Coste de 300 kWh y consumo para una factura de 20 €.

$C(x) = 8 + 0{,}06x$. $C(300) = 26$ €. Si $C = 20$: $0{,}06x = 12 \Rightarrow x = 200$ kWh.

Función cuadrática

Definición: parábola y vértice

La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene como gráfica una **parábola**, abierta hacia arriba si $a > 0$ (mínimo) y hacia abajo si a (máximo). Su **vértice** está en $x_v = -\dfrac{b}{2a}$.

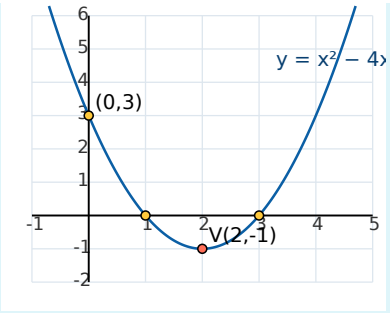
Método: representar una parábola

1. Calcula el vértice: $x_v = -b/(2a)$ e $y_v = f(x_v)$.
2. Halla los cortes con el eje X resolviendo $ax^2 + bx + c = 0$.
3. El corte con el eje Y es $(0, c)$.
4. Une los puntos con trazo suave.

Ejemplo 3

Estudia $y = x^2 - 4x + 3$.

$x_v = 2$, $y_v = -1$: mínimo en $(2, -1)$. Cortes con X: $x = 1$ y $x = 3$. Corte con Y: $(0, 3)$.



Ejemplo 4: ingreso máximo

$I(q) = -0{,}5q^2 + 30q$. **¿Cuándo es máximo?**

$q_v = -\dfrac{30}{2(-0{,}5)} = 30$ unidades, con $I(30) = 450$ €.

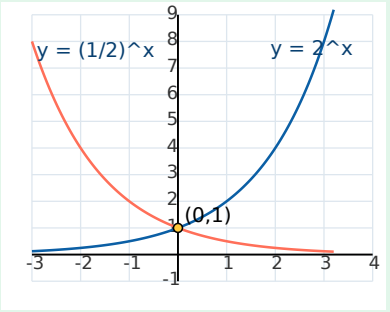
Función exponencial

Definición: exponencial

La función $f(x) = a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$ pasa siempre por $(0, 1)$, es positiva y tiene como asíntota horizontal el eje X.

Propiedad

Si $a > 1$ crece muy deprisa; si 0 decrece. Una variación del $r\,\%$ por periodo se modela con $f(t) = f_0(1 \pm r)^t$: interés compuesto, población que crece un 4 % anual, coche que se deprecia un 12 % anual.



Ejemplo 5

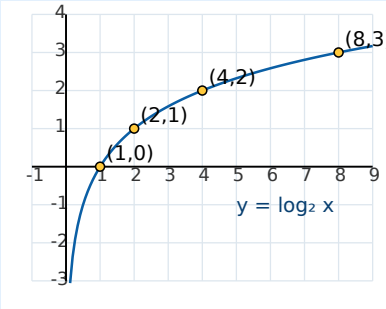
Una población de 5 000 habitantes crece un 4 % anual. ¿Cuántos habitantes habrá en 10 años?

$P(t) = 5000 \cdot 1{,}04^t$. $P(10) = 5000 \cdot 1{,}480244 \approx 7\,401$ habitantes.

Función logarítmica e inversa

Definición: logaritmo

$\log_a y = x \iff a^x = y$. La función $f(x) = \log_a x$ es la **inversa** de la exponencial: dominio $(0, +\infty)$, pasa por $(1, 0)$ y $(a, 1)$ y tiene asíntota vertical $x = 0$.



Propiedad: logaritmos

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $\log_a x^k = k \log_a x$. Sirven para despejar exponentes: $3^x = 20 \Rightarrow x = \dfrac{\log 20}{\log 3} \approx 2{,}73$.

Regla: función inversa

La inversa f^{-1} deshace lo que hace f. Se halla despejando x en $y = f(x)$ e intercambiando los nombres de las variables. Su gráfica es simétrica de la de f respecto de $y = x$. Ejemplo: la inversa de $f(x) = 2x + 3$ es $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{2}$.

Ejemplo 6: coste mínimo

$C(x) = 0{,}5x^2 - 10x + 80$. **¿Qué producción minimiza el coste?**

$x_v = -\dfrac{-10}{2 \cdot 0{,}5} = 10$ unidades; $C(10) = -50 + 80 = 30$ €. Como la parábola se abre hacia arriba, el coste crece tanto si se produce menos como si se produce más.

¡Atención!

- No confundas 2^x (exponencial) con x^2 (cuadrática).
- El logaritmo solo existe para argumentos positivos, y $\log(a + b) \neq \log a + \log b$.
- El vértice es $x_v = -b/(2a)$, con su signo.

Observación

Al interpretar una gráfica fíjate en los cortes con los ejes (cuándo vale cero y cuánto

vale al empezar), en los intervalos de crecimiento y decrecimiento, en los máximos y mínimos (beneficios máximos o costes mínimos) y en las asíntotas, rectas a las que la gráfica se acerca sin tocarlas. Por ejemplo, el precio con IVA es $P = 1{,}21\,b$, y su función inversa $b = P/1{,}21$ permite recuperar el precio sin IVA a partir del precio final. En una exponencial de crecimiento, el valor se multiplica por la misma cantidad en cada periodo, mientras que en una función lineal se suma siempre lo mismo: esa es la diferencia esencial entre ambos modelos y la razón por la que el interés compuesto acaba superando al simple.

Ampliación: elegir el modelo adecuado

Ante una tabla de datos, la primera pregunta es qué tipo de función los describe. Si al aumentar x en una cantidad fija la variable y aumenta (o disminuye) siempre en la **misma cantidad**, el modelo es afín. Si al aumentar x en una cantidad fija la variable y se **multiplica** siempre por el mismo número, el modelo es exponencial. Si las diferencias entre valores consecutivos de y cambian de manera uniforme (las diferencias de las diferencias son constantes), el modelo es cuadrático. Esta comprobación con una tabla permite identificar el modelo antes de calcular sus parámetros.

Método: reconocer el modelo con una tabla de valores

1. Calcula las diferencias $y_{k+1} - y_k$ entre valores consecutivos: si son constantes, el modelo es afín.
2. Si no lo son, calcula los cocientes y_{k+1}/y_k: si son constantes, el modelo es exponencial con base igual a ese cociente.
3. Si ni las diferencias ni los cocientes son constantes, calcula las diferencias de las diferencias: si son constantes, el modelo es cuadrático.
4. Con el modelo identificado, usa dos o tres datos para hallar los parámetros y comprueba con un dato más.

Ejemplo 7

Tabla de la población de una ciudad (en miles): año 0: 100; año 1: 105; año 2: 110,25; año 3: 115,76. ¿Qué modelo se ajusta?

Diferencias: 5; 5,25; 5,51 (no constantes). Cocientes: $105/100 = 1{,}05$; $110{,}25/105 = 1{,}05$; $115{,}76/110{,}25 \approx 1{,}05$ (constantes). El modelo es exponencial: $P(t) = 100 \cdot 1{,}05^{t}$. La población crece un 5 % cada año. La previsión para el año 10 es $100 \cdot 1{,}05^{10} = 162{,}9$ mil habitantes.

Ampliación: transformaciones de gráficas

A partir de la gráfica de una función $f(x)$ se obtienen otras muy parecidas con transformaciones sencillas. La gráfica de $f(x) + k$ es la de f desplazada k unidades hacia arriba (o hacia abajo si $k < 0$). La de $f(x - h)$ es la de f desplazada h unidades a la derecha. La de $-f(x)$ es la simétrica respecto del eje X, y la de $f(-x)$ la simétrica

respecto del eje Y. Estas ideas explican, por ejemplo, que la parábola $y = (x-3)^2 + 1$ es la de $y = x^2$ desplazada 3 unidades a la derecha y 1 hacia arriba, con vértice en $(3, 1)$. Del mismo modo, $y = 2^x - 3$ tiene la asíntota horizontal $y = -3$.

Propiedad: logaritmos

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ y $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
- $\log_a(x^n) = n \log_a x$.
- Cambio de base: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
- $a^x = b$ equivale a $x = \log_a b$, y $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$.

Ejemplo 8

Resuelve $5 \cdot 2^x - 3 = 37$ y $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 8$.

Primera ecuación: $5 \cdot 2^x = 40$, $2^x = 8$, $x = 3$. Segunda ecuación: el dominio exige $x > 1$. Se aplica la propiedad del producto: $\ln[(x+1)(x-1)] = \ln 8$, luego $x^2 - 1 = 8$, $x^2 = 9$ y $x = \pm 3$. Solo $x = 3$ cumple $x > 1$. Comprobación: $\ln 4 + \ln 2 = \ln 8$ ✓.

Ampliación: la función inversa y la composición

Dos funciones f y g son inversas si deshacen la acción una de la otra: $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$. Sus gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$. Para hallar la inversa de $y = f(x)$ se despeja x y se intercambian los nombres de las variables. La inversa de la recta $y = 3x - 6$ es $y = \dfrac{x+6}{3}$; la de $y = e^x$ es $y = \ln x$; y la de $y = x^2$ (con $x \geq 0$) es $y = \sqrt{x}$. No toda función tiene inversa: debe ser inyectiva, es decir, a cada valor de y le corresponde un único x. Por eso la parábola completa no tiene inversa, pero sí cada una de sus dos ramas.

Errores muy comunes con funciones elementales

- Olvidar el dominio al resolver ecuaciones con logaritmos o raíces: hay que descartar las soluciones que lo incumplen.
- Confundir $\log(a+b)$ con $\log a + \log b$: solo el producto se convierte en suma.
- Calcular el vértice con el signo incorrecto: $x_v = -b/(2a)$.
- Dar la pendiente de una recta como $\Delta x/\Delta y$ en lugar de $\Delta y/\Delta x$.
- Pensar que una exponencial puede tocar el eje X: nunca vale cero.

¿Sabías que?

Los logaritmos los inventó John Napier en 1614 para simplificar los cálculos de los astrónomos: convertían multiplicaciones en sumas y se utilizaban tablas y reglas de cálculo hasta que aparecieron las calculadoras en los años setenta. Hoy los logaritmos

siguen siendo imprescindibles en escalas como los decibelios, la escala de Richter para los terremotos o el pH de los líquidos, porque permiten manejar cantidades que varían en muchos órdenes de magnitud. Un terremoto de magnitud 6 libera unas 32 veces más energía que uno de magnitud 5, y esa comparación sería muy incómoda sin una escala logarítmica.

El consejo de Otto

Para dibujar rápido una función, calcula tres o cuatro puntos clave: cortes con los ejes, vértice o asíntotas, y un punto a cada lado. Une los puntos con trazo suave y comprueba que la forma coincide con su familia.