Ejercicios - Funciones elementales

Curso: 1 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Dominio de una función

Calcula el dominio de cada función, explicando qué restricción aparece.

a. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
b. $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-9}$
c. $h(x) = \sqrt{4x-8}$
d. $k(x) = \ln(5-x)$

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – La recta por dos puntos

Una recta pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(5,11)$.

a. Calcula la pendiente.
b. Escribe la ecuación de la recta en la forma $y = mx + n$.
c. Calcula los puntos de corte con los ejes.
d. Indica si la función es creciente o decreciente y calcula $f(10)$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Intersección de rectas

Sean las rectas $r:\ y = -x + 7$ y $s:\ y = 2x - 2$.

a. Calcula su punto de intersección.
b. Comprueba el resultado sustituyendo en las dos rectas.
c. Indica la pendiente de cada una y di si son paralelas.
d. Escribe la recta paralela a r que pasa por $(0,3)$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – La parábola paso a paso

Estudia la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a. Calcula el vértice.
b. Calcula los puntos de corte con los ejes.

c. Indica el eje de simetría y si el vértice es máximo o mínimo.
d. Haz una tabla de valores con $x = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ y describe la gráfica.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – La función exponencial

Sea $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a. Completa una tabla con $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ para las dos funciones.
b. Indica si cada una crece o decrece y por qué.
c. Indica la asíntota horizontal y el punto común de las dos gráficas.
d. Resuelve $2^x = 32$ y $2^x = \frac{1}{8}$.

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Logaritmos

Calcula y aplica las propiedades de los logaritmos.

a. $\log_2 16$, $\log_3 \frac{1}{9}$ y $\log_5 1$
b. $\log 2 + \log 50$
c. $\ln e^3 - \ln e$
d. Resuelve $\log_3(x + 2) = 2$ y $2^x = 7$ (da la solución con tres decimales).

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Dos tarifas de gas

Una familia de Salamanca compara dos tarifas de gas. La compañía A cobra 8 € fijos al mes y 0,90 € por cada m³ consumido. La compañía B cobra 20 € fijos y 0,60 € por m³.

a. Escribe la función de coste de cada compañía.
b. Calcula el coste de cada una con 20 m³ y con 50 m³.
c. Halla el consumo para el que ambas cuestan lo mismo.
d. ¿Qué compañía conviene si se consumen 60 m³ al mes?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Ingresos máximos

Una papelería de Valladolid vende cuadernos. Con un precio de p euros vende $q = 200 - 20p$ cuadernos al mes.

a. Escribe la función de ingresos $I(p) = p\,(200 - 20p)$.
b. Calcula los ingresos con $p = 2$ € y con $p = 8$ €.

c. Halla el precio que maximiza los ingresos y el ingreso máximo.
d. ¿Para qué precios los ingresos son nulos?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – La depreciación de un coche

Un coche nuevo de 20 000 € pierde cada año el 15 % de su valor del año anterior. El valor tras t años es $V(t) = 20\,000 \cdot 0{,}85^t$.

a. Calcula el valor tras 1, 3 y 5 años.
b. ¿Cuánto ha perdido en total en 5 años y qué porcentaje del valor inicial es?
c. ¿Cuántos años tarda en perder la mitad de su valor?
d. Explica por qué la gráfica tiene la asíntota $y = 0$ y qué significa.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Un cultivo de bacterias

En un laboratorio de la Universidad de Navarra, un cultivo comienza con 500 bacterias y se triplica cada 2 horas. El número de bacterias tras t horas es $N(t) = 500 \cdot 3^{t/2}$.

a. Calcula $N(0)$, $N(2)$ y $N(6)$.
b. ¿Cuántas bacterias habrá a las 5 horas?
c. ¿Cuánto tarda el cultivo en llegar a 40 500 bacterias?
d. ¿Cuánto tarda en duplicarse?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Oferta y demanda

En un mercado local de Murcia, la demanda de aguacates es $D(p) = 120 - 15p$ kilogramos al día y la oferta es $O(p) = 10p + 20$ kilogramos al día, donde p es el precio por kilo en euros.

a. Calcula la demanda y la oferta si el precio es 2 €/kg.
b. Halla el precio de equilibrio (oferta = demanda).
c. Calcula la cantidad que se intercambia en el equilibrio.
d. ¿Qué ocurre si el precio fuera de 6 €/kg?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Función inversa: grados

La relación entre los grados Celsius (C) y Fahrenheit (F) es $F = 1{,}8\,C + 32$.

a. Calcula cuántos grados Fahrenheit son 0 °C, 25 °C y 100 °C.
b. Halla la función inversa que da C en función de F.

c. Calcula a cuántos grados Celsius corresponden 50 °F y 104 °F.
d. ¿Existe una temperatura que sea igual en las dos escalas? Calcúlala.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El coste mínimo de una panadería

El coste diario (en euros) de producir x cientos de barras de pan en una panadería de Zamora es $C(x) = 2x^2 - 16x + 60$.

a. Calcula el coste de producir 100, 300 y 600 barras.
b. Halla cuántas barras minimizan el coste y cuál es el coste mínimo.
c. ¿Es razonable que el coste mínimo no sea cero? Explícalo.
d. Halla para qué producciones el coste es de 60 €.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Escalas logarítmicas: el ruido

El nivel de sonido en decibelios es $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, donde I es la intensidad del sonido e $I_0 = 10^{-12}$ W/m² es el umbral de audición.

a. Calcula el nivel de una conversación normal, con $I = 10^{-6}$ W/m².
b. Calcula el nivel de un concierto con $I = 10^{-1}$ W/m².
c. Si la intensidad se multiplica por 10, ¿cuántos decibelios sube el nivel?
d. ¿Qué intensidad corresponde a un nivel de 85 dB?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Alquilar un coche para el fin de semana

Una familia de Alicante quiere alquilar un coche durante un fin de semana y compara tres ofertas, según los kilómetros x que recorra. Oferta 1: 40 € fijos más 0,20 € por km. Oferta 2: 25 € fijos más 0,30 € por km. Oferta 3: tarifa plana de 60 € con hasta 150 km, y 0,40 € por km a partir del km 150 (por la parte que excede).

Oferta	Cuota fija	Precio por km
1	40 €	0,20 €
2	25 €	0,30 €
3	60 € (hasta 150 km)	0,40 € desde el km 150

a. Escribe la función de coste de las tres ofertas.
b. Completa una tabla con los costes para 50, 100, 150, 200 y 300 km.
c. Halla los kilómetros para los que las ofertas 1 y 2 cuestan lo mismo.
d. ¿Cuál es la oferta más barata para 120 km y para 300 km? Razona con la tabla.
e. La familia piensa recorrer 220 km. ¿Cuál elegiría y cuánto se ahorra respecto de

la más cara?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – El área máxima de un huerto

En una finca de Extremadura se dispone de 60 m de malla para cercar un huerto rectangular. Se quiere conocer la mayor superficie posible. Sea x la longitud de uno de los lados. La tabla muestra algunos casos.

x (m)	5	10	15	20	25
S (m²)					

a. Expresa el otro lado en función de x y escribe la superficie $S(x)$.
b. Completa la tabla de superficies.
c. Halla el vértice de la parábola y las dimensiones del huerto de área máxima.
d. Calcula el dominio de S en el contexto y los valores de x para los que $S = 200$.
e. Justifica por qué el huerto de área máxima es un cuadrado.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – La dosis de un fármaco

Un paciente de un hospital de Santiago toma 400 mg de un fármaco. La cantidad que queda en sangre decrece según $Q(t) = 400 \cdot 0{,}5^{t/6}$ mg, donde t son las horas desde la toma (la vida media es de 6 horas).

a. Calcula la cantidad que queda tras 6, 12 y 24 horas.
b. Calcula la cantidad tras 9 horas.
c. ¿Cuánto tarda en quedar 25 mg?
d. Si la dosis efectiva mínima es 50 mg, ¿cuándo debe tomar la siguiente dosis?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Duplicar el capital

Una cooperativa de Albacete deposita 8 000 € en una cuenta que paga un 3,5 % anual compuesto. El capital tras t años es $C(t) = 8\,000 \cdot 1{,}035^{t}$.

a. Calcula el capital a los 5 y a los 10 años.
b. ¿Cuánto tarda el capital en llegar a 12 000 €?
c. ¿Cuánto tarda en duplicarse?
d. Compara con una cuenta de interés simple al 3,5 % durante el tiempo de duplicación.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – El precio de las entradas

El comité de una orquesta aficionada de Oviedo organiza un concierto. Si cobra p euros por entrada, acudirán $400 - 20p$ personas. Los gastos fijos del concierto son de 600 €. La tabla recoge algunos precios.

Precio p (€)	5	10	12	15	20
Beneficio B (€)					

a. Escribe el beneficio $B(p) = p(400 - 20p) - 600$.
b. Completa la tabla de beneficios para $p = 5, 10, 12, 15, 20$.
c. Halla el precio que maximiza el beneficio y el beneficio máximo.
d. Halla los precios para los que no hay pérdidas (beneficio no negativo).
e. ¿Cuántas personas acuden con el precio óptimo? ¿Llena un auditorio de 250 plazas?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: hallar la función y su inversa

Una función exponencial $f(x) = a \cdot b^x$ pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(2, 12)$.

a. Halla a y b (con $b > 0$).
b. Calcula $f(3)$ y $f(-1)$.
c. Halla la función inversa $f^{-1}(x)$ usando logaritmos.
d. Calcula $f^{-1}(48)$ y comprueba que $f(f^{-1}(48)) = 48$.