Soluciones - Funciones elementales

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Es un polinomio: no hay restricciones. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.
b. El denominador no puede ser cero: $x^2 - 9 = 0$ implica $x = \pm 3$. $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.
c. El radicando debe ser no negativo: $4x - 8 \geq 0$ implica $x \geq 2$. $\operatorname{Dom} h = [2, +\infty)$.
d. El argumento del logaritmo debe ser positivo: $5 - x > 0$ implica $x < 5$. $\operatorname{Dom} k = (-\infty, 5)$.

Solución del ejercicio 2

a. La pendiente es el cociente entre la variación de y y la de x: $m = \dfrac{11 - 3}{5 - 1} = \dfrac{8}{4} = 2$.
b. Usamos la ecuación punto-pendiente con $A(1, 3)$: $y - 3 = 2(x - 1)$, luego $y = 2x + 1$. Comprobación con B: $2 \cdot 5 + 1 = 11$.
c. Corte con el eje Y: $x = 0$ da $y = 1$, punto $(0, 1)$. Corte con el eje X: $2x + 1 = 0$ da $x = -\frac{1}{2}$, punto $(-\frac{1}{2}, 0)$.
d. Como la pendiente $m = 2$ es positiva, la función es creciente: por cada unidad que avanza x, y aumenta 2. Además, $f(10) = 2 \cdot 10 + 1 = 21$.

Solución del ejercicio 3

a. $-x + 7 = 2x - 2$ implica $9 = 3x$, luego $x = 3$ e $y = -3 + 7 = 4$. Punto $(3, 4)$.
b. En r: $-3 + 7 = 4$ ✓. En s: $2 \cdot 3 - 2 = 4$ ✓.
c. Pendientes -1 y 2. Son distintas: no son paralelas (se cortan en un punto).
d. La paralela tiene pendiente -1 y corta en $n = 3$: $y = -x + 3$.

Solución del ejercicio 4

a. $x_v = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ y $y_v = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$. Vértice $(2, -1)$.
b. Eje Y: $f(0) = 3$, punto $(0, 3)$. Eje X: $x^2 - 4x + 3 = 0$ da $x = 1$ y $x = 3$, puntos $(1, 0)$ y $(3, 0)$.
c. Eje de simetría: la recta $x = 2$. Como $a = 1 > 0$, la parábola se abre hacia arriba y el vértice es un mínimo.
d. $f(-1) = 8$; $f(0) = 3$; $f(1) = 0$; $f(2) = -1$; $f(3) = 0$; $f(4) = 3$; $f(5) = 8$. Los valores se repiten simétricamente respecto de $x = 2$.

Solución del ejercicio 5

a. f: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8. g: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$.
b. f crece porque la base $2 > 1$; g decrece porque la base $\frac{1}{2} < 1$.
c. Ambas tienen la asíntota horizontal $y = 0$ (se acercan al eje X sin tocarlo) y pasan por $(0, 1)$.
d. $2^x = 32 = 2^5$ implica $x = 5$. $2^x = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ implica $x = -3$.

Solución del ejercicio 6

a. Un logaritmo es el exponente al que hay que elevar la base. $\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$; $\log_5 1 = 0$ porque $5^0 = 1$.
b. La suma de logaritmos es el logaritmo del producto: $\log 2 + \log 50 = \log(2 \cdot 50) = \log 100 = 2$.
c. Como $\ln e^a = a$, resulta $\ln e^3 = 3$ y $\ln e = 1$, luego $\ln e^3 - \ln e = 3 - 1 = 2$.
d. Por la definición de logaritmo, $x + 2 = 3^2 = 9$, así que $x = 7$. Para $2^x = 7$ tomamos logaritmos neperianos: $x \ln 2 = \ln 7$, luego $x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2} = \dfrac{1{,}9459}{0{,}6931} = 2{,}807$. Comprobación: $2^{2{,}807} \approx 7$.

Solución del ejercicio 7

a. $A(x) = 8 + 0{,}9x$ y $B(x) = 20 + 0{,}6x$ (rectas afines con ordenada en el origen 8 y 20).
b. Con 20 m³: $A = 26$ € y $B = 32$ €. Con 50 m³: $A = 53$ € y $B = 50$ €.
c. $8 + 0{,}9x = 20 + 0{,}6x$ implica $0{,}3x = 12$, luego $x = 40$ m³ (coste 44 € en las dos).
d. Con 60 m³: $A = 62$ € y $B = 56$ €. Conviene B (desde 40 m³ la compañía B es más barata).

Solución del ejercicio 8

a. $I(p) = 200p - 20p^2$ (una parábola que se abre hacia abajo).
b. $I(2) = 2 \cdot 160 = 320$ €. $I(8) = 8 \cdot 40 = 320$ €. Dan lo mismo por simetría respecto del vértice.
c. Vértice: $p = -\dfrac{200}{2 \cdot (-20)} = 5$ €. $I(5) = 5 \cdot 100 = 500$ €. Ingreso máximo de 500 € con 100 cuadernos vendidos.
d. $I(p) = 0$ implica $p = 0$ o $p = 10$. A 10 € no se vende ningún cuaderno.

Solución del ejercicio 9

a. $V(1) = 17\,000$ €. $V(3) = 20\,000 \cdot 0{,}614125 = 12282{,}50$ €.
$V(5) = 20\,000 \cdot 0{,}443705 = 8874{,}11$ €.
b. Pérdida: $20\,000 - 8874{,}11 = 11125{,}89$ €, es decir, el $55{,}6\,\%$ del valor inicial.
c. $0{,}85^t = 0{,}5$ implica $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}85} = \dfrac{-0{,}6931}{-0{,}1625} = 4{,}27$ años.
d. Como la base $0{,}85 < 1$, $V(t)$ decrece y se aproxima a 0 sin llegar nunca: el coche siempre vale algo (matemáticamente) aunque cada vez menos.

Solución del ejercicio 10

a. Sustituimos en la fórmula: $N(0) = 500 \cdot 3^0 = 500$; $N(2) = 500 \cdot 3^1 = 1\,500$; $N(6) = 500 \cdot 3^3 = 13\,500$ bacterias.
b. $N(5) = 500 \cdot 3^{2{,}5} = 500 \cdot 15{,}588 = 7794$. A las 5 horas habrá unas 7 794 bacterias.
c. Planteamos $500 \cdot 3^{t/2} = 40\,500$. Dividiendo entre 500: $3^{t/2} = 81 = 3^4$. Igualando exponentes, $t/2 = 4$ y $t = 8$ horas.
d. Duplicarse significa $3^{t/2} = 2$. Tomando logaritmos, $\dfrac{t}{2} = \dfrac{\ln 2}{\ln 3} = 0{,}631$, así que $t = 1{,}262$ horas, es decir, aproximadamente 1 h 16 min. El tiempo de duplicación no depende de la cantidad inicial.

Solución del ejercicio 11

a. $D(2) = 120 - 30 = 90$ kg y $O(2) = 20 + 20 = 40$ kg: la demanda supera a la oferta (faltan aguacates).
b. $120 - 15p = 10p + 20$ implica $100 = 25p$, luego $p = 4$ €/kg.
c. $D(4) = 120 - 60 = 60$ kg y $O(4) = 40 + 20 = 60$ kg. Se intercambian 60 kg al día.
d. $D(6) = 30$ kg y $O(6) = 80$ kg: la oferta supera la demanda en 50 kg (exceso de oferta), y habrá presión a la baja del precio.

Solución del ejercicio 12

a. Sustituimos en $F = 1{,}8C + 32$: $F(0) = 32$ °F; $F(25) = 45 + 32 = 77$ °F; $F(100) = 180 + 32 = 212$ °F, la temperatura de ebullición del agua.
b. Para hallar la inversa despejamos C: restamos 32 y dividimos entre 1,8, de modo que $C = \dfrac{F - 32}{1{,}8}$.
c. $C(50) = \dfrac{50 - 32}{1{,}8} = \dfrac{18}{1{,}8} = 10$ °C y $C(104) = \dfrac{104 - 32}{1{,}8} = \dfrac{72}{1{,}8} = 40$ °C.
d. Buscamos $C = F$: $C = 1{,}8C + 32$, luego $-0{,}8C = 32$ y $C = -40$. A -40 grados las dos escalas marcan lo mismo; gráficamente, la recta corta a la bisectriz $y = x$ en ese punto.

Solución del ejercicio 13

a. $C(1) = 2 - 16 + 60 = 46$ €; $C(3) = 18 - 48 + 60 = 30$ €; $C(6) = 72 - 96 + 60 = 36$ €.
b. Vértice: $x = \dfrac{16}{4} = 4$ cientos, es decir, 400 barras. $C(4) = 32 - 64 + 60 = 28$ €.
c. Sí: aunque se produjera poco, hay costes fijos (alquiler, luz, personal). El término independiente 60 son los costes fijos.
d. $2x^2 - 16x + 60 = 60$ implica $2x(x - 8) = 0$, luego $x = 0$ o $x = 8$ (800 barras).

Solución del ejercicio 14

a. Calculamos el cociente de intensidades: $\dfrac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^6$. Entonces $L = 10 \log 10^6 = 10 \cdot 6 = 60$ dB, el nivel típico de una conversación.
b. $\dfrac{10^{-1}}{10^{-12}} = 10^{11}$, luego $L = 10 \log 10^{11} = 110$ dB, un nivel que puede dañar el oído.
c. Con intensidad $10I$: $L' = 10 \log \dfrac{10I}{I_0} = 10 \left(\log 10 + \log \dfrac{I}{I_0} \right) = 10 + L$. Al multiplicar la intensidad por 10, el nivel sube 10 dB.
d. Despejamos: $85 = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$ implica $\log \dfrac{I}{I_0} = 8{,}5$, es decir, $\dfrac{I}{I_0} = 10^{8{,}5}$. Así $I = 10^{8{,}5} \cdot 10^{-12} = 10^{-3{,}5} \approx 3{,}16 \cdot 10^{-4}$ W/m².

Solución del ejercicio 15

a. $C_1(x) = 40 + 0{,}2x$; $C_2(x) = 25 + 0{,}3x$; $C_3(x) = 60$ si $x \leq 150$ y $C_3(x) = 60 + 0{,}4(x - 150)$ si $x > 150$.
b. Costes (oferta 1 / 2 / 3): 50 km: 50 / 40 / 60; 100 km: 60 / 55 / 60; 150 km: 70 / 70 / 60; 200 km: 80 / 85 / 80; 300 km: 100 / 115 / 120.
c. $40 + 0{,}2x = 25 + 0{,}3x$ implica $15 = 0{,}1x$, luego $x = 150$ km (coste 70 €).
d. Con 120 km: 64 / 61 / 60. La más barata es la 3 (60 €). Con 300 km: 100 / 115 / 120. La más barata es la 1 (100 €).
e. Con 220 km: oferta 1 $= 84$ €; oferta 2 $= 91$ €; oferta 3 $= 60 + 0{,}4 \cdot 70 = 88$ €. Elegiría la 1 (84 €) y se ahorra 7 € respecto de la 2.

Solución del ejercicio 16

a. Perímetro $2x + 2y = 60$ da $y = 30 - x$. $S(x) = x(30 - x) = 30x - x^2$.
b. $S(5) = 125$; $S(10) = 200$; $S(15) = 225$; $S(20) = 200$; $S(25) = 125$ m^2.
c. $x_v = -\dfrac{30}{2 \cdot (-1)} = 15$ y $S(15) = 225$ m^2. Dimensiones: 15×15 m.

d. Dominio: $0 < x < 30$. $30x - x^2 = 200$ implica $x^2 - 30x + 200 = 0$, con $x = 10$ o $x = 20$ (el mismo huerto girado).
e. Para $x = 15$, el otro lado es $30 - 15 = 15$: los dos lados coinciden, es decir, es un cuadrado. Entre todos los rectángulos de igual perímetro, el cuadrado tiene el mayor área.

Solución del ejercicio 17

a. Cada 6 horas la cantidad se reduce a la mitad: $Q(6) = 200$ mg; $Q(12) = 100$ mg; $Q(24) = 400 \cdot 0{,}5^4 = 25$ mg.
b. $Q(9) = 400 \cdot 0{,}5^{9/6} = 400 \cdot 0{,}5^{1{,}5} = 400 \cdot 0{,}35355 = 141{,}4$ mg.
c. $400 \cdot 0{,}5^{t/6} = 25$ implica $0{,}5^{t/6} = \dfrac{1}{16} = 0{,}5^4$. Igualando exponentes, $\dfrac{t}{6} = 4$ y $t = 24$ horas.
d. $400 \cdot 0{,}5^{t/6} = 50$ implica $0{,}5^{t/6} = \dfrac{1}{8} = 0{,}5^3$, luego $t = 18$ horas. Como a partir de ese momento la cantidad es menor que la dosis efectiva, debe tomar la siguiente dosis como máximo a las 18 horas.

Solución del ejercicio 18

a. $C(5) = 8000 \cdot 1{,}035^5 = 9501{,}49$ € y $C(10) = 8000 \cdot 1{,}035^{10} = 11284{,}79$ €.
b. Planteamos $8000 \cdot 1{,}035^t = 12\,000$, es decir, $1{,}035^t = 1{,}5$. Tomando logaritmos, $t = \dfrac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}035} = \dfrac{0{,}4055}{0{,}0344} = 11{,}79$ años; se alcanza durante el año 12.
c. $1{,}035^t = 2$ implica $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}035} = 20{,}15$ años.
d. Con interés simple, duplicar exige $8000 \cdot 0{,}035 \cdot t = 8000$, es decir, $0{,}035t = 1$ y $t = 28{,}57$ años. El interés compuesto duplica el capital unos 8,4 años antes.

Solución del ejercicio 19

a. $B(p) = 400p - 20p^2 - 600$.
b. $B(5) = 2000 - 500 - 600 = 900$; $B(10) = 4000 - 2000 - 600 = 1400$; $B(12) = 4800 - 2880 - 600 = 1320$; $B(15) = 6000 - 4500 - 600 = 900$; $B(20) = 8000 - 8000 - 600 = -600$ €.
c. Vértice: $p = \dfrac{400}{40} = 10$ €. $B(10) = 1400$ €.
d. $-20p^2 + 400p - 600 \geq 0$ implica $p^2 - 20p + 30 \leq 0$, con raíces $p = 10 \pm \sqrt{70} = 1{,}63$ y $18{,}37$. No hay pérdidas para $1{,}63 \leq p \leq 18{,}37$.
e. Con $p = 10$: $400 - 200 = 200$ personas. No se llenan las 250 plazas, pero el beneficio es el mayor posible.

Solución del ejercicio 20

a. En $x = 0$ la potencia vale 1, así que $f(0) = a = 3$. Luego $f(2) = 3b^2 = 12$, de donde $b^2 = 4$ y, como $b > 0$, $b = 2$. La función es $f(x) = 3 \cdot 2^x$.
b. $f(3) = 3 \cdot 2^3 = 24$ y $f(-1) = 3 \cdot 2^{-1} = 1{,}5$.
c. Despejamos x en $y = 3 \cdot 2^x$: $2^x = \dfrac{y}{3}$, luego $x = \log_2 \dfrac{y}{3}$. Intercambiando los nombres de las variables, $f^{-1}(x) = \log_2 \dfrac{x}{3}$, definida para $x > 0$.
d. $f^{-1}(48) = \log_2 16 = 4$. Comprobación: $f(4) = 3 \cdot 16 = 48$, así que $f(f^{-1}(48)) = 48$, como debe ocurrir con una función y su inversa.