Soluciones del examen - Funciones definidas a trozos

Curso: 1 Bachillerato Ccss · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $f(-3)=1$; $f(-1)=3$; $f(2)=3$; $f(4)=15$. Cada valor se calcula con el trozo al que pertenece x: $-3<-1$ usa $x+4$; -1 y 2 usan el trozo constante; $4>2$ usa x^2-1.
b. Por la izquierda: $-1+4=3$. Por la derecha: 3. Y $f(-1)=3$. Es continua en $x=-1$.
c. Por la izquierda: 3. Por la derecha: $2^2-1=3$. Y $f(2)=3$. También es continua en $x=2$.
d. Primer trozo ($x<-1$): $f<3$, recorrido $(-\infty,3)$. Segundo: $\{3\}$. Tercero ($x>2$): $x^2-1>3$, recorrido $(3,+\infty)$. Al unir los tres trozos, el recorrido de f es todo $\mathbb{R}$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $\lim_{x\to 3^-} g(x)=9-6+a=3+a$. Para $x<3$ se usa el primer trozo, que es un polinomio, así que basta sustituir: $3^2-2\cdot 3+a$.
b. $\lim_{x\to 3^+} g(x)=12-5=7$. Para $x>3$ se usa el segundo trozo y se sustituye: $4\cdot 3-5$.
c. Continuidad: $3+a=7$, luego $a=4$. Además $g(3)=3+a$, que con $a=4$ vale 7, igual que los dos límites laterales. Con cualquier otro valor de a habría un salto finito en $x=3$.
d. $g(0)=0-0+4=4$ y $g(5)=20-5=15$. Para $g(0)$ se usa el primer trozo porque $0\le 3$, y para $g(5)$ el segundo porque $5>3$. Respuesta: $a=4$, $g(0)=4$ y $g(5)=15$.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Si $2x-4\ge 0$ (es decir, $x\ge 2$): $h=2x-4$. Si $x<2$: $h=-(2x-4)=4-2x$. El punto de cambio es la raíz de $2x-4$, es decir, $x=2$.
b. $2x-4=6$ implica $x=5$; $2x-4=-6$ implica $x=-1$. Soluciones $x=5$ y $x=-1$. Comprobación: $|10-4|=6$ y $|-2-4|=6$.
c. $|x+1|\le 3$ equivale a $-3\le x+1\le 3$, es decir, $-4\le x\le 2$. Solución: $[-4,2]$. Comprobación con un valor interior: $x=0$ da $|1|=1\le 3$.
d. El mínimo es 0 y se alcanza en $x=2$ (el vértice de la «V»). Como un valor absoluto nunca es negativo, $h(x)\ge 0$ y $h(2)=0$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. $F(x) = 5 + 0{,}15x$ si $0 \leq x \leq 100$; $F(x) = 5 + 15 + 0{,}12(x - 100) = 0{,}12x + 8$ si $100 < x \leq 300$; $F(x) = 5 + 15 + 24 + 0{,}10(x - 300) = 0{,}10x + 14$ si $x > 300$. Los 100 primeros kWh cuestan $100 \cdot 0{,}15 = 15$ € y los 200 del segundo tramo $200 \cdot 0{,}12 = 24$ €; por eso aparecen esas cantidades acumuladas.

b. $F(80) = 5 + 12 = 17$ €. $F(250) = 0{,}12 \cdot 250 + 8 = 38$ €. $F(400) = 0{,}10 \cdot 400 + 14 = 54$ €. Por ejemplo, para 250 kWh: $5 + 15 + 150 \cdot 0{,}12 = 5 + 15 + 18 = 38$ €, que coincide con la fórmula.

c. En $x = 100$: $5 + 15 = 20$ y $0{,}12 \cdot 100 + 8 = 20$. En $x = 300$: $0{,}12 \cdot 300 + 8 = 44$ y $0{,}10 \cdot 300 + 14 = 44$. Coinciden: es continua. Como cada tramo empieza donde acaba el anterior, la factura no da saltos: consumir un kWh más nunca dispara el importe.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $C(m) = 10m$ si $0 \leq m \leq 3$ (el primer tramo, 30 € a los 3 meses); $C(m) = 30 + 8(m - 3) = 8m + 6$ si $3 < m \leq 12$; $C(m) = 30 + 72 + 5(m - 12) = 5m + 42$ si $m > 12$.

b. $C(6) = 8 \cdot 6 + 6 = 54$ €. $C(12) = 8 \cdot 12 + 6 = 102$ €. $C(24) = 5 \cdot 24 + 42 = 162$ €.

c. En $m = 3$: $10 \cdot 3 = 30$ y $8 \cdot 3 + 6 = 30$. En $m = 12$: $8 \cdot 12 + 6 = 102$ y $5 \cdot 12 + 42 = 102$. Es continua en ambos puntos.

d. Otro gimnasio: $9m$. Primero: $8m + 6 < 9m$ implica $m > 6$ para $m \leq 12$. Entonces ya desde el mes 7 es más barato el bono (en $m = 6$ cuestan lo mismo, 54 €). Para $m > 12$ también: $5m + 42 < 9m$ implica $m > 10{,}5$.