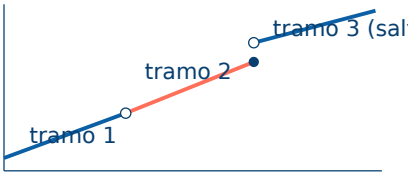
Apuntes - Funciones definidas a trozos

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Muchas magnitudes cambian de regla según la cantidad: las tarifas de agua o de luz, los tramos de impuestos, las comisiones de ventas o el precio de un envío. Las funciones definidas a trozos las describen con una expresión distinta en cada tramo.

Actividad de introducción: la factura del agua cambia con el consumo

Mira el recibo del agua de tu casa. Es probable que no pague lo mismo por cada metro cúbico: los primeros metros cúbicos son baratos y, a partir de cierto consumo, el precio sube para penalizar el derroche. Lo mismo ocurre con los impuestos sobre la renta, con las tarifas de teléfono, con el alquiler de bicicletas o con el taxi. En todos estos casos una sola fórmula no basta para describir el precio: se necesitan varias, una para cada tramo, cada una válida en un intervalo. Una función con este comportamiento se llama función definida a trozos. Para estudiarla hay que saber evaluarla, dibujarla, comprobar si tiene saltos y resolver ecuaciones teniendo en cuenta a qué trozo pertenece cada solución. El valor absoluto, que a primera vista parece algo distinto, es también una función a trozos, y las funciones escalón, con sus saltos regulares, completan el repertorio.



Qué es una función definida a trozos

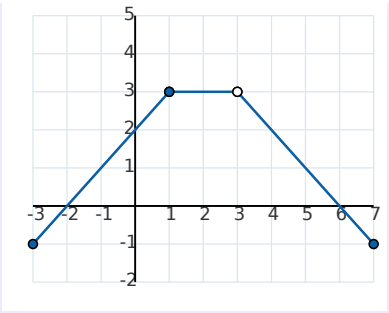
Definición: función a trozos

Una función **definida a trozos** usa expresiones distintas en intervalos distintos de su dominio, por ejemplo

$$f(x) = \{x + 2 \quad \text{si } x3$$

Regla: evaluar

Para calcular $f(a)$ se mira en qué intervalo está a y se usa *solo* la expresión de ese tramo: $f(0) = 2$, $f(2) = 3$, $f(5) = 1$.



Método: representarla

1. Dibuja cada tramo en su intervalo (recta, parábola...), calculando los valores en los extremos.
2. Marca un **punto relleno** si el extremo pertenece al tramo ($\leq$, $\geq$) y un **punto vacío** si no (, $>$).
3. Comprueba si los tramos se unen o dejan un salto en los puntos de cambio.

Ejemplo 1

Calcula $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ y $f(5)$ para la función anterior.

$f(-2) = 0$ (tramo 1). $f(1) = 3$ y $f(3) = 3$ (tramo 2). $f(5) = -5 + 6 = 1$ (tramo 3).

Continuidad en los puntos de unión

Definición: continuidad y salto

De forma intuitiva, una función es **continua** en un punto si su gráfica se dibuja pasando por él sin levantar el lápiz. En un punto de cambio $x = a$ se comparan los valores de las dos expresiones: si coinciden con $f(a)$ hay continuidad; si no, hay un **salto**.

Método: hallar un parámetro para que sea continua

1. Calcula el valor de cada expresión en el punto de unión.
2. Iguala los dos valores.
3. Resuelve la ecuación para el parámetro.
4. Comprueba el resultado.

Ejemplo 2

***f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x*. Halla k para que sea continua.**

$2^2 - 1 = 2k - 3$, es decir, $3 = 2k - 3$, luego $k = 3$.

Ejemplo 3: salto

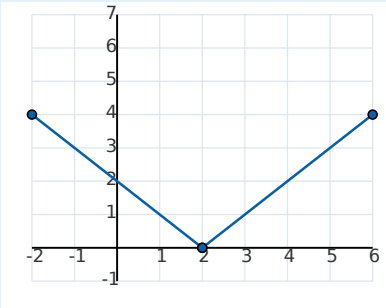
$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 1 \\ x+3 & x > 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$**.**

Por la izquierda: 3. Por la derecha: 4. Son distintos: discontinuidad de salto.

Valor absoluto

Definición: valor absoluto

$|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si x. Es una función a trozos con gráfica en forma de «V». Para $|x-2|$, el cambio ocurre en $x = 2$: vale $x - 2$ si $x \geq 2$ y $2 - x$ si x.



Regla: ecuaciones con valor absoluto

$|A| = k$ con $k > 0$ equivale a $A = k$ o $A = -k$. Y $|A|$ equivale a $-k$.

Ejemplo 4

Resuelve $|2x - 4| = 6$**.**

$2x - 4 = 6 \Rightarrow x = 5$ o $2x - 4 = -6 \Rightarrow x = -1$.

Tarifas por tramos y escalones

Ejemplo 5: tarifa de agua

6 € fijos más 0,50 € por m³ hasta 10 m³, y 0,90 € por cada m³ que exceda de 10. Coste de 18 m³.

$C(x) = 6 + 0{,}5x$ si $0 \leq x \leq 10$ y $C(x) = 11 + 0{,}9(x - 10)$ si $x > 10$. Ambos tramos valen 11 € en $x = 10$: continua. $C(18) = 11 + 0{,}9 \cdot 8 = 18{,}20$ €.

Ejemplo 6: impuestos por tramos

Impuesto ficticio: 19 % de los primeros 12 000 €, 24 % de lo que pasa de 12 000 hasta 25 000 y 30 % del resto. Cuota de 30 000 €.

$2280 + 13000 \cdot 0{,}24 + 5000 \cdot 0{,}30 = 2280 + 3120 + 1500 = 6900$ €. Cada tipo se aplica solo a su tramo.

Observación: función escalón

Una **función escalón** es constante en cada tramo, como un aparcamiento que cobra 1 € por hora o fracción. Sus gráficas tienen saltos, y los puntos vacíos y rellenos indican a qué escalón pertenece cada extremo. La tarifa de envíos de un paquete, que cambia de golpe al pasar de peso, es discontinua; el coste de un consumo por tramos con cuota fija suele ser continuo, porque cada tramo empieza donde acaba el anterior.

Dominio, recorrido y monotonía

Propiedad

El dominio es la unión de los intervalos de los tramos y el recorrido se obtiene uniendo los valores de cada tramo. Para estudiar crecimiento y decrecimiento se analiza cada tramo por separado. En la función inicial, crece en $(-\infty, 1)$, es constante en $[1, 3]$ y decrece en $(3, +\infty)$; su máximo es 3 y el recorrido es $(-\infty, 3]$.

Método: resolver $f(x) = c$

1. Plantea la ecuación en cada tramo por separado.
2. Comprueba que cada solución pertenece al intervalo de su tramo.
3. Descarta las que caen fuera.

Ejemplo 7

Resuelve $f(x) = 1$ para la función inicial.

Tramo 1: $x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$, cumple x. Tramo 2: $3 = 1$, imposible. Tramo 3: $-x + 6 = 1 \Rightarrow x = 5$, cumple $x > 3$. Soluciones: $x = -1$ y $x = 5$.

¡Atención!

- No uses una expresión fuera de su intervalo ni dos tramos a la vez en un extremo.
- En tarifas por tramos, no apliques el precio del último tramo a toda la cantidad.
- En $|x| = a$ no olvides la solución negativa.

Ampliación: cómo se lee y se dibuja una función a trozos

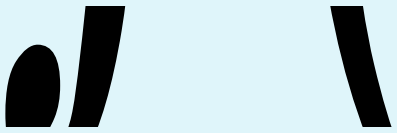
Una función a trozos se lee de arriba abajo mirando cada fórmula junto con su condición. Antes de sustituir un valor hay que decidir a qué condición pertenece, y solo entonces se

aplica la fórmula. Los extremos de los intervalos son el punto crítico del problema: las desigualdades estrictas ($<$, $>$) dan un punto vacío en la gráfica y las no estrictas ($\leq$, $\geq$) dan un punto lleno. Conviene calcular siempre dos valores en cada punto de unión: el que da el trozo de la izquierda y el que da el trozo de la derecha. Si coinciden, la gráfica no se interrumpe; si no, hay un salto.

Método: estudiar la continuidad de una función a trozos

1. Las funciones elementales de cada trozo (polinomios, valores absolutos) son continuas en el interior de su intervalo, así que solo hay que revisar los puntos de unión.
2. En cada punto de unión $x = a$, calcula $f(a)$, el límite por la izquierda y el límite por la derecha.
3. Si los tres valores coinciden, la función es continua en a; si los límites laterales son distintos, hay una discontinuidad de salto (finito si ambos existen); si los límites coinciden pero $f(a)$ es distinto, la discontinuidad es evitable.
4. Si hay un parámetro, iguala los dos límites y resuelve la ecuación para hallarlo.

Ejemplo 8

Halla k y m para que  **sea continua en toda la recta.**

En $x = 0$: el límite por la izquierda es $0 + 1 = 1$ y el valor del trozo central es $k \cdot 0 + m = m$, luego $m = 1$. En $x = 2$: el límite por la izquierda es $2k + m = 2k + 1$ y por la derecha $2^2 - 1 = 3$, luego $2k + 1 = 3$ y $k = 1$. Comprobamos: $f(x) = x + 1$ en el centro, que enlaza con $x + 1$ a la izquierda y con 3 a la derecha. La función es continua en toda la recta.

Ampliación: tarifas, impuestos y funciones escalón

En los modelos económicos conviene distinguir dos situaciones. En un **tramo progresivo** (impuesto sobre la renta, tarifa del agua o de la luz) cada precio se aplica solo a la parte de la cantidad que cae en ese tramo; la función resultante es continua, con pendientes crecientes o decrecientes. En un **precio por escalones** (aparcamiento, tarifa por hora entera, envío por peso) el precio se mantiene constante en tramos y salta de golpe; la función es discontinua. Una confusión muy habitual es aplicar el precio del último tramo a todo el consumo, lo que daría una función discontinua donde no debe serlo.

Ejemplo 9

Un servicio de mensajería cobra 5 € si el paquete pesa hasta 1 kg, 8 € si pesa más de 1 kg y hasta 3 kg, y 12 € si pesa más de 3 kg. Calcula el coste de paquetes de 0,5 kg, 1 kg, 2,5 kg y 3,2 kg y describe la gráfica.

Con 0,5 kg y con 1 kg se paga 5 € (el 1 pertenece al primer tramo); con 2,5 kg, 8 €;

con 3,2 kg, 12 €. La gráfica es una función escalón: tres segmentos horizontales a alturas 5, 8 y 12, con el punto lleno en el extremo derecho de los dos primeros tramos y el punto vacío en el extremo izquierdo del siguiente. Los saltos en $x = 1$ y $x = 3$ son de 3 € y de 4 €.

Ampliación: ecuaciones con valor absoluto

Regla: valor absoluto en ecuaciones e inecuaciones

- $|u| = c$ con $c > 0$ equivale a $u = c$ o $u = -c$; si $c = 0$, solo $u = 0$; si $c < 0$, no tiene solución.
- $|u| < c$ equivale a $-c < u < c$ (un intervalo acotado).
- $|u| > c$ equivale a $u > c$ o $u < -c$ (dos semirrectas).
- $|u| = |v|$ equivale a $u = v$ o $u = -v$.

Ejemplo 10

Resuelve $|x - 4| = 2x - 1$.

Debe cumplirse $2x - 1 \geq 0$, es decir, $x \geq 0{,}5$. Primer caso: $x - 4 = 2x - 1$ implica $x = -3$, que no cumple $x \geq 0{,}5$ (se descarta). Segundo caso: $x - 4 = -(2x - 1) = -2x + 1$ implica $3x = 5$, $x = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$, que sí cumple.

Comprobamos: $|1{,}67 - 4| = 2{,}33$ y $2 \cdot 1{,}67 - 1 = 2{,}33$. La única solución es $x = \frac{5}{3}$.

Errores muy comunes con funciones a trozos

- Sustituir el valor en la fórmula equivocada: primero se decide el tramo.
- Aplicar el precio del tramo superior a todo el consumo en lugar de solo a la parte que lo excede.
- Olvidar comprobar que las soluciones obtenidas en un trozo pertenecen a ese trozo.
- Dibujar un punto lleno en ambos lados de un punto de unión cuando solo uno de los trozos lo incluye.
- Dar $|a - b| = a - b$ sin comprobar el signo, o escribir $|x| = -x$ sin indicar que solo vale para $x < 0$.

¿Sabías que?

La notación $|x|$ para el valor absoluto fue introducida por el matemático alemán Karl Weierstrass en 1841. Aunque a veces se escribe con barras como si fuese «borrar el signo», su significado es en realidad la distancia al cero, y por eso $|a - b|$ es la distancia entre los números a y b en la recta. Esta idea de distancia es la base de la definición de límite, que verás en el tema siguiente.

El consejo de Otto

Antes de representar, calcula siempre el valor de cada expresión en los puntos de cambio. Si los dos números coinciden, la gráfica se une; si no, habrá un salto.