Ejercicios - Funciones definidas a trozos

Curso: 1 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Evaluar una función a trozos

Sea la función 

a. Calcula $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(5)$ indicando qué trozo usas en cada caso.
b. Calcula el valor de la función cuando x se acerca a 0 por la izquierda y por la derecha.
c. Calcula los valores de f cuando x se acerca a 3 por la izquierda y por la derecha.
d. ¿Es continua en $x = 0$ y en $x = 3$?

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Dibujar, dominio y recorrido

Considera la función 

a. Completa una tabla de valores con $x = -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$.
b. Describe la gráfica: tipo de cada trozo y puntos llenos y vacíos en los extremos.
c. Indica el dominio y el recorrido.
d. Resuelve $g(x) = 2$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Continuidad con un parámetro

Se considera $h(x) = \begin{cases} 2x + k & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a. Calcula el límite lateral de h cuando $x \to 1^-$ en función de k.
b. Calcula el límite por la derecha y $h(1)$.
c. Halla el valor de k para que h sea continua en $x = 1$.
d. Con ese k, calcula $h(0)$ y $h(2)$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – El valor absoluto como función a trozos

Sea $f(x) = |x - 2|$.

a. Escribe f como función definida a trozos.
b. Calcula $f(-1)$, $f(2)$ y $f(5)$.
c. Describe la gráfica y su vértice.
d. Resuelve $|x - 2| = 3$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Resuelve las siguientes expresiones con valor absoluto.

a. $|2x - 1| = 5$
b. $|x + 3| < 4$
c. $|x - 1| \geq 2$
d. $|3x + 2| = -4$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Discontinuidad de salto

En una escuela de música de Valencia se paga una cuota mensual que depende del número de horas x de clase: $c(x) = \begin{cases} 20x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 15x + 30 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ (en euros).

a. Calcula la cuota para 3 horas, para 4 horas y para 6 horas.
b. Calcula los límites laterales en $x = 4$.
c. ¿Es continua la función en $x = 4$? Interprétalo.
d. Halla el valor del último término (en lugar de 30) para que la función sea continua.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La factura del agua

En un municipio de Madrid, el recibo del agua tiene una cuota fija de 6 € al mes más un precio por tramos de consumo: los primeros 10 m³ cuestan 0,80 €/m³; de 10 a 25 m³ cada metro cúbico de ese tramo cuesta 1,20 €; y por encima de 25 m³, cada metro cúbico cuesta 2,00 €. Cada precio se aplica solo a los metros cúbicos de su tramo.

a. Escribe la función $P(x)$ que da el importe mensual según los m³ consumidos x.
b. Calcula el recibo de una familia que consume 8 m³ y de otra que consume 18 m³.
c. Calcula el recibo con 30 m³.
d. ¿Es continua la función? ¿Por qué?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – Impuestos por tramos

Un sistema fiscal sencillo (inspirado en el IRPF) aplica estos tipos a la base imponible x de un contribuyente: el 19 % a los primeros 12 450 €; el 24 % a la parte entre 12 450 € y 20 200 €; el 30 % a la parte entre 20 200 € y 35 200 €; y el 37 % a lo que exceda de 35 200 €. Cada tipo afecta solo al tramo correspondiente.

a. Calcula el impuesto de una persona con una base de 10 000 €.
b. Calcula el impuesto con una base de 18 000 €.
c. Calcula el impuesto con una base de 30 000 €.
d. Calcula el tipo medio (impuesto entre base) en cada caso y comenta.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – El aparcamiento y la función escalón

Un aparcamiento del centro de León cobra así: los primeros 15 minutos son gratis; después, 1,20 € por hora o fracción hasta 2 horas; y a partir de 2 horas, 1,80 € por hora o fracción adicional sobre los 2,40 € ya pagados por las dos primeras horas.

a. Calcula el precio por 10 minutos, por 40 minutos y por 2 horas.
b. Calcula el precio por 2 horas y 10 minutos y por 3 horas y media.
c. Describe la forma de la gráfica y explica qué es una función escalón.
d. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad hasta las 3 horas.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El taxi

En una ciudad andaluza, la tarifa de un taxi es: bajada de bandera de 3,20 €, más 1,10 € por kilómetro durante los primeros 10 km y 1,50 € por cada kilómetro a partir del kilómetro 10.

a. Escribe la función del precio $T(x)$ en función de los kilómetros x.
b. Calcula el precio de un trayecto de 6 km y de otro de 18 km.
c. ¿Es continua en $x = 10$?
d. Si un cliente paga 31,40 €, ¿cuántos kilómetros ha recorrido?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – La tarifa del móvil

Una compañía telefónica ofrece una tarifa con 20 GB incluidos por 12 € al mes. Cada GB adicional por encima de 20 cuesta 0,50 €.

a. Escribe la función que da la factura según los GB consumidos.
b. Calcula la factura con 15 GB y con 32 GB.

c. ¿Cuántos GB ha consumido un cliente que paga 20 €?
d. Otra compañía cobra 18 € por 40 GB. ¿A partir de cuántos GB conviene la segunda?

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Dominio, recorrido y monotonía

Sea 

a. Calcula $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ y $f(7)$.
b. Estudia la continuidad en $x = 1$ y en $x = 4$.
c. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d. Halla el recorrido.

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Resolver f(x) = c

Sea $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a. Resuelve $f(x) = 5$.
b. Resuelve $f(x) = 8$.
c. Resuelve $f(x) = 0$.
d. ¿Cuántas soluciones tiene $f(x) = 7$?

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Camisetas por cantidades

Una tienda de merchandising de un club de fútbol de Sevilla vende camisetas con descuento por cantidad: las 10 primeras cuestan 12 € cada una; de la 11 a la 30, 9 € cada una; y a partir de la 31, 7 € cada una.

a. Escribe la función del coste total $C(n)$ según el número de camisetas n.
b. Calcula el coste de 8, 25 y 40 camisetas.
c. Calcula el precio medio por camiseta en cada caso.
d. ¿Cuántas camisetas se pueden comprar con 400 €?

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – Alquiler de bicicletas

Dos empresas de alquiler de bicicletas de San Sebastián tienen estas tarifas, donde t son las horas de uso. Empresa A: los primeros 30 minutos son gratis; después 1,50 €

por hora (proporcional) hasta las 3 horas; a partir de las 3 horas, 3 € por hora. Empresa B: 2,50 € fijos hasta 1 hora y luego 2 € por hora.

a. Escribe la función de coste de la empresa A, $A(t)$, y la de la empresa B, $B(t)$.
b. Calcula el coste de cada empresa para 1 hora, 2 horas y 4 horas.
c. Estudia la continuidad de A en $t = 3$.
d. ¿En qué intervalo de tiempo es más barata la empresa A que la B?
e. Un grupo quiere alquilar 5 bicis durante 4 horas. ¿Qué empresa les conviene y cuánto se ahorran en total?

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – El sueldo de un comercial

Un comercial de una empresa de Valladolid cobra un fijo de 1 000 € al mes más comisiones sobre las ventas del mes (v, en euros). Cobra el 5 % de las ventas hasta 10 000 € y, por encima de esa cifra, el 8 % de la parte que exceda de 10 000 €. La empresa quiere ver cómo evoluciona el sueldo según las ventas.

a. Escribe la función $S(v)$ del sueldo.
b. Calcula el sueldo con ventas de 6 000 € y de 15 000 €.
c. Comprueba que S es continua en $v = 10\,000$.
d. ¿Qué ventas hacen falta para cobrar 2 000 € al mes?
e. Calcula la pendiente de cada trozo e interprétala.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – El perfil de una montaña rusa

El perfil de un tramo de una atracción de un parque de Madrid se modela con la función $h(x) = \begin{cases} -0{,}5x + a & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0{,}25x^2 - 2x + b & \text{si } 4 < x \le 12 \end{cases}$, donde x es la distancia horizontal en decenas de metros y h la altura en decenas de metros. La altura al empezar es de 8 (es decir, 80 m).

a. Halla a imponiendo $h(0) = 8$ y calcula $h(4)$.
b. Halla b para que la función sea continua en $x = 4$.
c. Calcula la altura en $x = 8$ y en $x = 12$.
d. Calcula la altura mínima del segundo trozo (vértice) y la distancia a la que se alcanza.
e. ¿En qué puntos del trayecto h es igual a 4?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – El llenado de una piscina

Una piscina de un polideportivo de Gijón de 120 m³ se llena en tres fases: durante las 2 primeras horas entran 20 m³ cada hora; en las 3 horas siguientes se reduce el caudal a

10 m³/h; y después entran 5 m³/h hasta llenarse. Sea $V(t)$ el volumen (en m³) a las t horas.

a. Escribe $V(t)$ por tramos.
b. Calcula el volumen a las 1 h, 4 h y 6 h.
c. ¿Es continua la función? Justifícalo.
d. ¿Cuánto tarda en llenarse la piscina?
e. Calcula el caudal medio de todo el proceso.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Beneficio con una subvención

Una pequeña conservera de Cantabria tiene un beneficio mensual (en euros) $B(q) = -q^2 + 60q - 500$ cuando vende q cientos de latas. Una ayuda pública le concede 150 € adicionales solo si vende más de 40 cientos de latas, de modo que $B(q) = -q^2 + 60q - 500$ si $q \leq 40$ y $B(q) = -q^2 + 60q - 350$ si $q > 40$.

a. Calcula el beneficio con 20 y con 50 cientos de latas.
b. Estudia la continuidad en $q = 40$.
c. Halla el máximo de la parte sin ayuda ($q \leq 40$) comprobando que el vértice está dentro del tramo.
d. Halla el máximo de la parte con ayuda y compáralo.
e. ¿Le conviene a la empresa superar los 40 cientos de latas? Razona la respuesta.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: dos valores absolutos

Considera la función $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$.

a. Escribe f como función definida a trozos.
b. Calcula $f(-3)$, $f(0)$ y $f(4)$.
c. Resuelve $f(x) = 5$.
d. Halla el mínimo de f y dónde se alcanza.