Soluciones - Funciones definidas a trozos

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. $x = -3 < 0$: $f(-3) = -3 + 2 = -1$. $x = 0$ cumple $0 \leq x < 3$: $f(0) = 0^2 = 0$. $x = 2$: $f(2) = 4$. $x = 3 \geq 3$: $f(3) = 9$. $x = 5$: $f(5) = 9$.
b. Por la izquierda ($x < 0$): $x + 2 \to 2$. Por la derecha ($x \geq 0$): $x^2 \to 0$. Los límites laterales son 2 y 0.
c. Por la izquierda ($x < 3$): $x^2 \to 9$. Por la derecha: 9. Ambos valen 9 y $f(3) = 9$.
d. En $x = 0$ no es continua: los límites laterales (2 y 0) son distintos, hay un salto de 2 unidades. En $x = 3$ sí es continua: límite por la izquierda $=$ límite por la derecha $= f(3) = 9$.

Solución del ejercicio 2

a. $g(-2) = 3$; $g(0) = 1$; $g(1) = 2$; $g(2) = 2$; $g(3) = 2$; $g(4) = 3$; $g(6) = 5$.
b. Primer trozo: recta de pendiente -1 que llega hasta $(1, 0)$ con punto vacío (porque $x < 1$). Segundo trozo: segmento horizontal a altura 2 con puntos llenos en $(1, 2)$ y $(3, 2)$. Tercer trozo: recta de pendiente 1 que parte de $(3, 2)$ con punto vacío; coincide con el punto lleno del segundo trozo, de modo que la gráfica no se interrumpe.
c. Dominio: todos los reales, $\mathbb{R}$. Recorrido: el primer trozo toma valores mayores que 0 (para $x < 1$, $-x + 1 > 0$); el segundo, 2; el tercero, valores mayores que 2. Recorrido $= (0, +\infty)$.
d. En el primer trozo: $-x + 1 = 2$ implica $x = -1 < 1$, válida. En el segundo: $g(x) = 2$ para todo $x \in [1, 3]$. En el tercero: $x - 1 = 2$ implica $x = 3$, que no cumple $x > 3$. Solución: $x = -1$ y todo el intervalo $[1, 3]$.

Solución del ejercicio 3

a. Por la izquierda se usa $2x + k$: $\lim_{x \to 1^-} h(x) = 2 \cdot 1 + k = 2 + k$.
b. Por la derecha se usa $x^2 + 3$: $\lim_{x \to 1^+} h(x) = 1 + 3 = 4$ y $h(1) = 4$.
c. Continuidad: $2 + k = 4$, luego $k = 2$.
d. $h(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$ y $h(2) = 4 + 3 = 7$.

Solución del ejercicio 4

a. Si $x - 2 \geq 0$, es decir $x \geq 2$, $|x - 2| = x - 2$. Si $x < 2$, $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$. Entonces $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

b. $f(-1) = |-3| = 3$; $f(2) = 0$; $f(5) = 3$.
c. Tiene forma de «V» con vértice en $(2, 0)$, que es el mínimo. Las dos ramas tienen pendientes -1 y 1.
d. $x - 2 = 3$ implica $x = 5$, o $x - 2 = -3$ implica $x = -1$. Las dos soluciones son $x = 5$ y $x = -1$ (se comprueba en f: $f(5) = f(-1) = 3$).

Solución del ejercicio 5

a. Dos casos: $2x - 1 = 5$ implica $x = 3$; $2x - 1 = -5$ implica $x = -2$. Soluciones $x = 3$ y $x = -2$.
b. $|x + 3| < 4$ equivale a $-4 < x + 3 < 4$, es decir, $-7 < x < 1$. Solución: el intervalo $(-7, 1)$.
c. $|x - 1| \geq 2$ equivale a $x - 1 \geq 2$ o $x - 1 \leq -2$, es decir, $x \geq 3$ o $x \leq -1$. Solución: $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.
d. Un valor absoluto nunca es negativo, así que no tiene solución.

Solución del ejercicio 6

a. $c(3) = 60$ €; $c(4) = 80$ €; $c(6) = 15 \cdot 6 + 30 = 120$ €.
b. Por la izquierda: $20 \cdot 4 = 80$. Por la derecha: $15 \cdot 4 + 30 = 90$.
c. No es continua en $x = 4$: los límites laterales (80 y 90) son distintos. Hay un salto de 10 € en la cuota al pasar de 4 horas a un poco más de 4 horas.
d. Para continuidad se necesita $15 \cdot 4 + b = 80$, es decir, $60 + b = 80$ y $b = 20$. Con $b = 20$, no hay salto.

Solución del ejercicio 7

a. Tramo 1 ($0 \leq x \leq 10$): $P = 6 + 0{,}8x$. Tramo 2 ($10 < x \leq 25$): $P = 6 + 8 + 1{,}2(x - 10) = 1{,}2x + 2$. Tramo 3 ($x > 25$): $P = 6 + 8 + 18 + 2(x - 25) = 2x - 18$. Se cumple que 8 € es lo que cuestan los primeros 10 m³ y 18 € lo que cuestan los 15 m³ siguientes.
b. $P(8) = 6 + 6{,}4 = 12{,}40$ €. $P(18) = 1{,}2 \cdot 18 + 2 = 23{,}60$ €.
c. $P(30) = 2 \cdot 30 - 18 = 42$ €. Comprobación por tramos: $6 + 8 + 18 + 2 \cdot 5 = 42$ €.
d. Sí. En $x = 10$: $6 + 0{,}8 \cdot 10 = 14$ y $1{,}2 \cdot 10 + 2 = 14$. En $x = 25$: $1{,}2 \cdot 25 + 2 = 32$ y $2 \cdot 25 - 18 = 32$. Coinciden porque cada precio solo se aplica a los m³ de su tramo, y no a todo el consumo.

Solución del ejercicio 8

a. Solo el primer tramo: $10000 \cdot 0{,}19 = 1900$ €.
b. $12450 \cdot 0{,}19 + (18000 - 12450) \cdot 0{,}24 = 2365{,}50 + 1332 = 3697{,}50$ €.
c. $2365{,}50 + (20200 - 12450) \cdot 0{,}24 + (30000 - 20200) \cdot 0{,}30 = 2365{,}50 + 1860 + 2940 = 7165{,}50$

€.

d. Tipos medios: $\frac{1900}{10000} = 19\,\%$; $\frac{3697{,}50}{18000} = 20{,}54\,\%$; $\frac{7165{,}50}{30000} = 23{,}89\,\%$. El tipo medio crece con la base, pero siempre es menor que el tipo del último tramo: el sistema es progresivo.

Solución del ejercicio 9

a. 10 minutos: 0 € (dentro del cuarto de hora gratuito). 40 minutos: se paga 1 hora o fracción: $1{,}20$ €. 2 horas: $2{,}40$ €.
b. 2 h 10 min: 2 horas ya pagadas más una hora o fracción: $2{,}40 + 1{,}80 = 4{,}20$ €. 3 h 30 min: $2{,}40 + 1{,}80 \cdot 2 = 6{,}00$ €.
c. La gráfica son tramos horizontales (escalones) con saltos hacia arriba al empezar cada nueva hora o fracción. Una función escalón es constante en tramos y salta de uno a otro.
d. No es continua: tiene saltos en $t = 0{,}25$ h (de 0 a 1,20 €), $t = 1$ h, $t = 2$ h y $t = 3$ h. En cada uno, el precio aumenta de golpe.

Solución del ejercicio 10

a. $T(x) = 3{,}20 + 1{,}10x$ si $0 \le x \le 10$; para $x > 10$: $T(x) = 3{,}20 + 11 + 1{,}50(x - 10) = 1{,}5x - 0{,}8$.
b. $T(6) = 3{,}20 + 6{,}60 = 9{,}80$ €. $T(18) = 1{,}5 \cdot 18 - 0{,}8 = 26{,}20$ €.
c. Sí: por la izquierda $3{,}20 + 11 = 14{,}20$ y por la derecha $1{,}5 \cdot 10 - 0{,}8 = 14{,}20$.
d. Como $T(10) = 14{,}20 < 31{,}40$, se está en el segundo tramo: $1{,}5x - 0{,}8 = 31{,}40$, $x = \frac{32{,}2}{1{,}5} = 21{,}47$ km. Salen unos 21,5 km.

Solución del ejercicio 11

a. $F(x) = 12$ si $0 \le x \le 20$; $F(x) = 12 + 0{,}5(x - 20) = 0{,}5x + 2$ si $x > 20$.
b. $F(15) = 12$ €. $F(32) = 0{,}5 \cdot 32 + 2 = 18$ €.
c. $0{,}5x + 2 = 20$ implica $x = 36$ GB.
d. La primera costaría 18 € con 32 GB, lo mismo que la segunda. A partir de $0{,}5x + 2 > 18$, es decir $x > 32$ GB, la primera es más cara y conviene la segunda (hasta 40 GB).

Solución del ejercicio 12

a. $f(-2) = 4$; $f(1) = 1$; $f(3) = 0$; $f(4) = -1$; $f(7) = -1$.
b. En $x = 1$: por la izquierda $1^2 = 1$; por la derecha $3 - 1 = 2$. No es continua (salto de 1). En $x = 4$: por la izquierda $3 - 4 = -1$; por la derecha -1, y $f(4) = -1$. Es

continua.

c. En $(-\infty, 0)$ decrece (x^2 baja hacia 0); en $(0, 1)$ crece; en $(1, 4)$ decrece (recta de pendiente -1); en $(4, +\infty)$ es constante.

d. Primer trozo: valores en $[0, +\infty)$ pero solo con $x \leq 1$, es decir, $[0, +\infty)$ (para $x \leq 0$ toma todos los valores no negativos). Segundo: $[-1, 2)$. Tercero: $\{-1\}$. Recorrido total: $[-1, +\infty)$.

Solución del ejercicio 13

a. Primer trozo: $2x + 3 = 5$ implica $x = 1 < 2$, válida. Segundo: $x^2 - 1 = 5$ implica $x^2 = 6$, $x = \pm\sqrt{6}$; solo $x = \sqrt{6} \approx 2{,}45 \geq 2$ es válida. Soluciones: $x = 1$ y $x = \sqrt{6}$.

b. Primer trozo: $2x + 3 = 8$ implica $x = 2{,}5$, no válida ($x < 2$). Segundo: $x^2 = 9$, $x = 3$ (válida) o $x = -3$ (no). Solución: $x = 3$.

c. Primer trozo: $2x + 3 = 0$ implica $x = -1{,}5$, válida. Segundo: $x^2 = 1$, $x = 1$ no cumple $x \geq 2$; $x = -1$ tampoco. Solución: $x = -1{,}5$.

d. Primer trozo: $2x + 3 = 7$ implica $x = 2$, que no cumple $x < 2$. Segundo: $x^2 = 8$, $x = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83 \geq 2$, válida. Una solución.

Solución del ejercicio 14

a. Tramo 1 ($1 \leq n \leq 10$): $C = 12n$. Tramo 2 ($10 < n \leq 30$): $C = 120 + 9(n - 10) = 9n + 30$. Tramo 3 ($n > 30$): $C = 120 + 180 + 7(n - 30) = 7n + 90$.

b. $C(8) = 96$ €. $C(25) = 9 \cdot 25 + 30 = 255$ €. $C(40) = 7 \cdot 40 + 90 = 370$ €.

c. Precio medio $= C(n)/n$: $\dfrac{96}{8} = 12$ €; $\dfrac{255}{25} = 10{,}20$ €; $\dfrac{370}{40} = 9{,}25$ €. Baja con la cantidad.

d. $C(40) = 370 < 400$. En el tercer tramo: $7n + 90 = 400$ implica $n = \dfrac{310}{7} = 44{,}29$. Se pueden comprar 44 camisetas (coste $7 \cdot 44 + 90 = 398$ €).

Solución del ejercicio 15

a. $A(t) = 0$ si $0 \leq t \leq 0{,}5$; $A(t) = 1{,}5(t - 0{,}5)$ si $0{,}5 < t \leq 3$; $A(t) = 3{,}75 + 3(t - 3)$ si $t > 3$. $B(t) = 2{,}5$ si $0 \leq t \leq 1$; $B(t) = 2{,}5 + 2(t - 1)$ si $t > 1$.

b. 1 h: $A = 0{,}75$ €, $B = 2{,}50$ €. 2 h: $A = 2{,}25$ €, $B = 4{,}50$ €. 4 h: $A = 3{,}75 + 3 = 6{,}75$ €, $B = 2{,}5 + 6 = 8{,}50$ €.

c. Por la izquierda: $1{,}5 \cdot 2{,}5 = 3{,}75$. Por la derecha: $3{,}75$. Y $A(3) = 3{,}75$. Es continua en $t = 3$.

d. Hasta 3 horas A es mucho más barata (por ejemplo, 2,25 frente a 4,50 en 2 horas). Para $t > 3$: $3{,}75 + 3(t - 3) < 2{,}5 + 2(t - 1)$ implica $3t - 5{,}25 < 2t + 0{,}5$, es decir, $t < 5{,}75$. A es más barata mientras $t < 5{,}75$ horas.

e. Con 4 horas: A cuesta 6,75 € y B 8,50 €. Por 5 bicis: A $33{,}75$ € y B $42{,}50$ €. Se

ahorran $8{,}75$ € con A.

Solución del ejercicio 16

a. $S(v) = 1000 + 0{,}05v$ si $0 \le v \le 10\,000$;
$S(v) = 1000 + 500 + 0{,}08(v - 10\,000) = 0{,}08v + 700$ si $v > 10\,000$.
b. $S(6000) = 1000 + 300 = 1300$ €. $S(15000) = 0{,}08 \cdot 15000 + 700 = 1900$ €.
c. Por la izquierda: $1000 + 0{,}05 \cdot 10000 = 1500$. Por la derecha:
$0{,}08 \cdot 10000 + 700 = 1500$. Coinciden: es continua.
d. Con 15 000 € se llega a 1 900 €, así que hace falta más: $0{,}08v + 700 = 2000$ implica $v = 16\,250$ €.
e. La pendiente 0,05 del primer trozo indica que cada euro vendido aporta 5 céntimos; la pendiente 0,08 del segundo, que cada euro por encima de 10 000 aporta 8 céntimos.

Solución del ejercicio 17

a. $h(0) = a = 8$, luego $a = 8$. $h(4) = -0{,}5 \cdot 4 + 8 = 6$.
b. Por la derecha: $0{,}25 \cdot 16 - 8 + b = -4 + b$. Igualamos a 6: $b = 10$.
c. $h(8) = 0{,}25 \cdot 64 - 16 + 10 = 10$. $h(12) = 0{,}25 \cdot 144 - 24 + 10 = 22$.
d. Vértice en $x = \dfrac{2}{2 \cdot 0{,}25} = 4$. Pero $x = 4$ está en el borde del tramo (pertenece al primero). En el segundo trozo, h es creciente para $x > 4$ (derivada $0{,}5x - 2 > 0$). No hay mínimo interior: el mínimo del segundo trozo se alcanza en el extremo, con altura 6.
e. Primer trozo: $-0{,}5x + 8 = 4$ implica $x = 8$, que no está en $[0, 4]$. Segundo trozo: $0{,}25x^2 - 2x + 10 = 4$ implica $x^2 - 8x + 24 = 0$, discriminante $64 - 96 < 0$: sin solución. Nunca llega a 4.

Solución del ejercicio 18

a. $V(t) = 20t$ si $0 \le t \le 2$; $V(t) = 40 + 10(t - 2) = 10t + 20$ si $2 < t \le 5$;
$V(t) = 70 + 5(t - 5) = 5t + 45$ si $t > 5$.
b. $V(1) = 20$ m³. $V(4) = 60$ m³. $V(6) = 75$ m³.
c. Sí. En $t = 2$: 40 y $10 \cdot 2 + 20 = 40$. En $t = 5$: 70 y $5 \cdot 5 + 45 = 70$. El volumen no puede dar saltos.
d. $5t + 45 = 120$ implica $t = 15$ horas. Se llena en 15 h (comprobación: 5 h para llegar a 70 m³, y 50 m³ más con 5 m³/h son 10 h).
e. Caudal medio $= \dfrac{120}{15} = 8$ m³/h.

Solución del ejercicio 19

a. $B(20) = -400 + 1200 - 500 = 300$ €. $B(50) = -2500 + 3000 - 350 = 150$ €.
b. Por la izquierda: $-1600 + 2400 - 500 = 300$. Por la derecha: $-1600 + 2400 - 350 = 450$. No es continua: salto de 150 € en $q = 40$.
c. Vértice $q = 30 \leq 40$: $B(30) = -900 + 1800 - 500 = 400$ €.
d. La parábola del segundo trozo tiene vértice en $q = 30$, que no cumple $q > 40$; allí es decreciente, así que su máximo está cerca de $q = 40$: $B(40^+) \approx 450$ €.
e. Sí: con 40,01 cientos de latas se cobra la ayuda y el beneficio es de unos 450 €, mayor que el máximo normal (400 € a las 30). Conviene vender justo por encima de 40, porque el salto de la ayuda compensa la caída de la parábola.

Solución del ejercicio 20

a. Los puntos críticos son $x = -2$ y $x = 1$. Si $x < -2$: $f = (1 - x) + (-x - 2) = -2x - 1$. Si $-2 \leq x < 1$: $f = (1 - x) + (x + 2) = 3$. Si $x \geq 1$: $f = (x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$.
b. $f(-3) = -2(-3) - 1 = 5$; $f(0) = 3$; $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.
c. En $x < -2$: $-2x - 1 = 5$ implica $x = -3$, válida. En $[-2, 1)$: $f = 3 \neq 5$. En $x \geq 1$: $2x + 1 = 5$ implica $x = 2$, válida. Soluciones: $x = -3$ y $x = 2$.
d. El mínimo vale 3 y se alcanza en todo el intervalo $[-2, 1]$ (es la distancia entre -2 y 1).