Soluciones del examen - Distribuciones binomial y normal

Curso: 1 Bachillerato Ccss · Duración: 60 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$ y todas las probabilidades están entre 0 y 1. Es una distribución de probabilidad.
b. Multiplicamos cada valor por su probabilidad y sumamos: $\mu = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 + 0{,}6 + 1{,}2 + 0{,}4 = 2{,}4$ pedidos por hora. El valor 2,4 no tiene por qué ser un valor posible de X: es el promedio de pedidos a largo plazo.
c. $\sum x_i^2 p_i = 0{,}2 + 1{,}2 + 3{,}6 + 1{,}6 = 6{,}6$. Varianza: $\sigma^2 = 6{,}6 - 2{,}4^2 = 6{,}6 - 5{,}76 = 0{,}84$. Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0{,}84} = 0{,}917$ pedidos.
d. Sumamos los valores 3 y 4: $P(X \geq 3) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$. La mitad de las horas llegan 3 o más pedidos. Es lo mismo que $1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. Cada paquete está dañado o no, con probabilidad constante 0,08 e independencia, en 10 pruebas: $X \sim B(10; 0{,}08)$. Los parámetros son $n = 10$ pruebas y $p = 0{,}08$ de «éxito» (paquete dañado).
b. Ninguno dañado: los 10 llegan bien, $P(X = 0) = 0{,}92^{10} = 0{,}4344$. Se obtiene con $\binom{10}{0} 0{,}08^0\, 0{,}92^{10}$, donde los dos primeros factores valen 1.
c. Fórmula binomial: $P(X = 2) = \binom{10}{2} 0{,}08^2\, 0{,}92^8 = 45 \cdot 0{,}0064 \cdot 0{,}513219 = 0{,}1478$. Hay $\binom{10}{2} = 45$ maneras de elegir qué dos paquetes están dañados.
d. Por el suceso contrario, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}4344 = 0{,}5656$. La media es $\mu = np = 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$ paquetes dañados por cada 10. Interpretación: en más de la mitad de los lotes de 10 aparece algún paquete dañado, aunque por término medio solo hay 0,8.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. Tipificamos: $z = \dfrac{150 - 180}{20} = -1{,}5$.
$P(X < 150) = \Phi(-1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$. Por la simetría de la normal, $\Phi(-1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5)$; alrededor del 6,7 % de las naranjas pesa menos de 150 g.
b. $z_1 = \dfrac{170 - 180}{20} = -0{,}5$ y $z_2 = \dfrac{210 - 180}{20} = 1{,}5$. Restamos áreas:
$P = \Phi(1{,}5) - \Phi(-0{,}5) = 0{,}9332 - 0{,}3085 = 0{,}6247$. Además

$\Phi(-0{,}5) = 1 - \Phi(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$. Aproximadamente el 62,5 % de las naranjas está en ese intervalo.

c. $z = \dfrac{220 - 180}{20} = 2$. $P(X > 220) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$, es decir, el 2,28 %. Pesar 220 g supone estar dos desviaciones típicas por encima de la media.

d. Número esperado $= n \cdot p$: $80 \cdot 0{,}0228 = 1{,}82$. En una caja de 80 habrá, por término medio, unas 2 naranjas de más de 220 g. No se redondea la probabilidad antes de multiplicar; el resultado final se interpreta como un número entero aproximado.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Destipificamos con $x = \mu + z\sigma$ y $z = -0{,}67$:
$x = 120 - 0{,}67 \cdot 30 = 120 - 20{,}1 = 99{,}9$ €. El 25 % que menos gasta no supera unos 100 € al mes. El valor buscado deja a su izquierda un área de 0,25, por eso z es negativo.

b. Con $z = 1{,}28$: $x = 120 + 1{,}28 \cdot 30 = 120 + 38{,}4 = 158{,}4$ €. El 10 % que más gasta supera los 158,4 €. Aquí el área a la izquierda del valor es 0,90.

c. El 95 % central deja un 2,5 % en cada cola, por eso $z = \pm 1{,}96$:
$120 \pm 1{,}96 \cdot 30 = 120 \pm 58{,}8$. El intervalo es $(61{,}2;\ 178{,}8)$ euros. Comprobación en la tabla: $\Phi(1{,}96) = 0{,}975$.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $X \sim B(150; 0{,}6)$. Como $np = 90 \geq 5$ y $nq = 60 \geq 5$, se aproxima por una normal de media 90 y desviación $\sqrt{150 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{36} = 6$: $X \approx N(90;\ 6)$. La media es $np = 150 \cdot 0{,}6 = 90$.

b. Con la corrección de continuidad, $P(X \geq 100) \approx P(X' > 99{,}5)$, con $z = \dfrac{99{,}5 - 90}{6} = 1{,}58$. $P = 1 - \Phi(1{,}58) = 1 - 0{,}9429 = 0{,}0571$. Se toma 99,5 porque el entero 100 ocupa el intervalo $[99{,}5;\ 100{,}5]$ en la normal.

c. $P(X < 85) = P(X \leq 84) \approx P(X' < 84{,}5)$, con $z = \dfrac{84{,}5 - 90}{6} = -0{,}92$.
$P = \Phi(-0{,}92) = 0{,}1788$. Es poco probable: ocurre en alrededor del 18 % de las muestras.

d. $P(X > 75) \approx P(X' > 75{,}5)$, con $z = \dfrac{75{,}5 - 90}{6} = -2{,}42$.
$P = 1 - \Phi(-2{,}42) = 0{,}9922$. El proyecto se aprobaría casi con seguridad. Para que no se aprobara harían falta 75 vecinos a favor o menos, algo que casi nunca sucede.