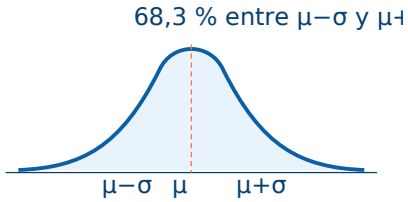
Apuntes - Distribuciones binomial y normal

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Muchos fenómenos económicos y sociales son aleatorios: cuántos clientes compran, cuántas piezas salen defectuosas, cuánto gana una familia. Las distribuciones de probabilidad describen cómo se reparten los posibles valores. Dos son fundamentales: la binomial (contar éxitos) y la normal (medidas continuas).

Actividad de introducción: ¿cuántas veces saldrá cara?

Lanza una moneda 10 veces y anota cuántas caras salen. Es probable que obtengas 4, 5 o 6, pero también puede salir 3 o 7, y de forma muy rara 0 o 10. Si repites el experimento muchas veces, verás que los resultados se agrupan en una forma de campana alrededor del 5. Esa campana tiene nombre: es una distribución. Para contar éxitos en pruebas independientes se utiliza la distribución binomial, que se calcula con una fórmula exacta. Para describir magnitudes continuas como la altura de las personas, el peso de una pieza o la duración de una batería, que se agrupan alrededor de un valor central, se usa la distribución normal, que se calcula con tablas. Y cuando el número de pruebas es muy grande, la binomial se parece tanto a una campana normal que se pueden usar las tablas para evitar cálculos enormes. Este tema reúne las tres ideas.



Variable aleatoria discreta

Definición: variable aleatoria y distribución

Una **variable aleatoria** X asigna un número a cada resultado de un experimento aleatorio. Es **discreta** si toma valores aislados x_i con probabilidades p_i, que suman 1. Su **media o esperanza** es $\mu = E(X) = \sum x_i p_i$; su **varianza**, $\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2$; su desviación típica, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Ejemplo 1

X toma los valores 0, 1, 2, 3 con probabilidades 0,1; 0,3; 0,4; 0,2. Halla μ y σ.

$\mu = 0 + 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}6 = 1{,}7$. $\sum x_i^2 p_i = 0 + 0{,}3 + 1{,}6 + 1{,}8 = 3{,}7$.

$\sigma^2 = 3{,}7 - 1{,}7^2 = 0{,}81$; $\sigma = 0{,}9$.

Distribución binomial

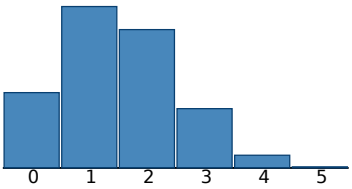
Definición: binomial B(n, p)

Se repite n veces, de forma independiente, un experimento con dos resultados (éxito con probabilidad p, fracaso con $q = 1 - p$). El número de éxitos X sigue una distribución **binomial** $B(n, p)$.

Regla: probabilidad y parámetros

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{\,n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad \mu = np, \quad \sigma = \sqrt{npq}.$$

Con $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.



Método: problema binomial

1. Identifica el éxito, n y p.
2. Comprueba que las repeticiones son independientes con la misma p.
3. Traduce lo pedido ($= k$, $\geq k$, «al menos uno»...).
4. Usa la fórmula o el contrario: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

Ejemplo 2

En $B(5; 0{,}3)$, halla $P(X = 2)$.

$\binom{5}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 = 10 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}343 = 0{,}3087$.

Ejemplo 3: control de calidad

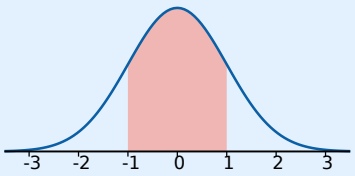
Una pieza es defectuosa con probabilidad 0,05. En un lote de 12, halla $P(\text{ninguna defectuosa})$ y $P(\text{exactamente una})$.

$X \sim B(12; 0{,}05)$. $P(X = 0) = 0{,}95^{12} = 0{,}5404$. $P(X = 1) = 12 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{11} = 0{,}3413$.

Distribución normal

Definición: distribución normal

Una variable continua sigue una **distribución normal** $N(\mu, \sigma)$ si su densidad tiene forma de campana simétrica respecto de μ. Sirve para estaturas, errores de medida, notas o ventas diarias. En $N(\mu, \sigma)$, μ es la media y σ la desviación típica. La **normal estándar** es $N(0, 1)$, con variable Z.



Propiedad

- El área total bajo la curva es 1 y las probabilidades son áreas.
- Simetría: $P(Z \leq -a) = 1 - P(Z \leq a)$.
- Regla empírica: en $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ hay un 68 % de los datos, en $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ un 95 % y en $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ un 99,7 %.

Regla: tipificación

Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, y

$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \dfrac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{x - \mu}{\sigma}\right)$, que se busca en la tabla de la $N(0, 1)$.

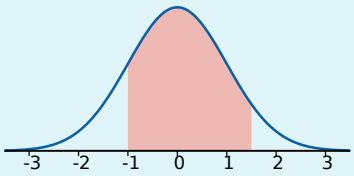
Método: calcular probabilidades con la tabla

1. Tipifica los valores: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$.
2. Escribe la probabilidad con Φ: $P(Z > a) = 1 - \Phi(a)$; $P(a.
3. Para z negativo usa $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.
4. Para el problema inverso, busca en el cuerpo de la tabla la probabilidad y lee z.

Ejemplo 4

Estaturas $X \sim N(170, 8)$. Halla $P(X > 180)$ y $P(154$.

$z = \dfrac{180 - 170}{8} = 1{,}25$: $P(X > 180) = 1 - \Phi(1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$. Para el intervalo, z va de -2 a 1: $\Phi(1) - \Phi(-2) = 0{,}8413 - 0{,}0228 = 0{,}8185$.



Aproximación de la binomial por la normal

Regla: aproximación

Si $X \sim B(n,p)$ con $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, entonces X se aproxima por $Y \sim N(np, \sqrt{npq})$. Se aplica la **corrección de continuidad**: $P(X \leq k) \approx P(Y \leq k+0{,}5)$, $P(X \geq k) \approx P(Y \geq k-0{,}5)$, $P(X = k) \approx P(k-0{,}5 \leq Y \leq k+0{,}5)$.

Ejemplo 5

$X \sim B(100; 0{,}5)$. **Halla** $P(X \leq 55)$.

$\mu = 50$, $\sigma = \sqrt{25} = 5$. $P(X \leq 55) \approx P(Y \leq 55{,}5) = \Phi\left(\dfrac{5{,}5}{5}\right) = \Phi(1{,}1) = 0{,}8643$.

Ejemplo 6: encuesta con aproximación

Una encuesta se hace a 400 personas y cada una responde «sí» con probabilidad 0,1. Halla aproximadamente $P(X > 50)$.

$X \sim B(400; 0{,}1)$, con $np = 40 \geq 5$ y $nq = 360 \geq 5$. Entonces $\mu = 40$ y $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 6$. Como $P(X > 50) = P(X \geq 51)$, con corrección de continuidad se calcula $P(Y \geq 50{,}5)$: $z = \dfrac{50{,}5 - 40}{6} = 1{,}75$. Resultado: $1 - \Phi(1{,}75) = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$. Es decir, es poco probable (un 4 %) que más de 50 personas respondan que sí.

Ejemplo 7: problema inverso

Las ventas diarias siguen $N(500, 50)$. ¿Qué stock cubre la demanda el 95 % de los días?

Se busca k con $P(X \leq k) = 0{,}95$. En la tabla, $\Phi(z) = 0{,}95$ para $z \approx 1{,}645$. Destipificando, $k = 500 + 1{,}645 \cdot 50 = 582{,}25$. Con 583 unidades en almacén, la demanda queda cubierta aproximadamente 19 de cada 20 días.

¡Atención!

- Para que sea binomial las repeticiones deben ser independientes y con la misma probabilidad.
- σ es la desviación típica, no la varianza: al tipificar se divide entre σ.

- No olvides la corrección de continuidad al aproximar una binomial.
- $P(Z > a) = 1 - \Phi(a)$, no $\Phi(a)$.

Observación

En una variable continua la probabilidad de un valor exacto es 0; solo tienen probabilidad los intervalos. En empresas, la normal se usa para dimensionar existencias: si las ventas diarias son $N(500, 50)$, con 582 unidades en stock se cubre aproximadamente el 95 % de los días. El valor $z = 1{,}645$ deja un 95 % a su izquierda, y es muy usado.

Ampliación: elegir el modelo adecuado

Lo primero que hay que decidir ante un problema es qué distribución utilizar. Si se cuenta cuántas veces ocurre un suceso en un número fijo de pruebas independientes, todas con la misma probabilidad de éxito, el modelo es binomial: el número de piezas defectuosas de una caja, las respuestas acertadas en un test al azar, los clientes que compran de entre los que entran en una tienda. Si la magnitud puede tomar cualquier valor de un intervalo y los valores centrales son los más frecuentes, con simetría a ambos lados, el modelo es normal: tallas, pesos, tiempos de trayecto, notas, errores de medida. La frase del enunciado «sigue una distribución normal» es la señal de que hay que tipificar.

Método: resolver un problema de binomial

1. Identifica la prueba, el «éxito», el número de pruebas n y la probabilidad p de éxito.
2. Escribe $X \sim B(n; p)$ y comprueba que las pruebas son independientes.
3. Traduce la pregunta: «exactamente k», «a lo sumo k» ($\leq$), «al menos k» ($\geq$), «menos de k» ($<$).
4. Calcula con la fórmula o con el suceso contrario: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.
5. Interpreta el resultado en el contexto.

Ejemplo 8

En una clase de 25 alumnos, la probabilidad de que cada uno tenga el carné de conducir es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno lo tenga?

$X \sim B(25; 0{,}2)$. Es más fácil por el suceso contrario: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^{25} = 1 - 0{,}0038 = 0{,}9962$. Es casi seguro que haya al menos uno. La media es $\mu = 25 \cdot 0{,}2 = 5$ alumnos con carné y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 2$.

Ampliación: la tabla de la normal y los cuantiles

La tabla de la normal estándar $N(0, 1)$ da el valor $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ para valores positivos de z con dos decimales. Para los valores negativos se utiliza la simetría de la campana:

$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. De ahí se deducen las tres reglas que más se usan: $P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$, $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ y $P(|Z| < z) = 2\Phi(z) - 1$. Para el cálculo inverso, la pregunta es qué valor deja por debajo una probabilidad dada. Se busca esa probabilidad en el interior de la tabla y se lee el z correspondiente; después se «destipifica» con $x = \mu + z\sigma$.

Propiedad: valores de z que conviene recordar

Probabilidad a la izquierda	z
0,90	1,28
0,95	1,645
0,975	1,96
0,99	2,33

Por simetría, el valor para 0,10 es $-1{,}28$, para 0,05 es $-1{,}645$ y para 0,025 es $-1{,}96$.

Ejemplo 9

La altura de unos estudiantes es $N(168;\ 8)$ cm. ¿Entre qué valores se encuentra el 95 % central?

Con $z = \pm 1{,}96$: $168 \pm 1{,}96 \cdot 8 = 168 \pm 15{,}7$, es decir, entre 152,3 cm y 183,7 cm. Fuera de ese intervalo se encuentra solo el 5 % de los estudiantes, la mitad (2,5 %) por debajo de 152,3 cm y la otra mitad por encima de 183,7 cm.

Ampliación: la corrección de continuidad

La binomial es discreta y la normal es continua. Para aproximar $P(X = k)$ con una normal se usa el intervalo $(k - 0{,}5,\ k + 0{,}5)$, porque «el valor entero k» se representa en la campana como una barra de ancho 1 centrada en k. Esta idea se llama corrección de continuidad. Según el signo de la desigualdad: *P(X\le k)□pprox P(Y\lt k+0{,}5)*; *P(X\ge k)□pprox P(Y\gt k-0{,}5)*; *P(X\lt k)□pprox P(Y\lt k-0{,}5)*; *P(X\gt k)□pprox P(Y\gt k+0{,}5)*; *P(a\le X\le b)□pprox P(a-0{,}5\lt Y\lt b+0{,}5)*. Si olvidas la corrección, el error es apreciable cuando n no es muy grande.

Ejemplo 10

Un dado equilibrado se lanza 120 veces. Aproxima la probabilidad de obtener 25 o más seises.

$X \sim B(120;\ \frac{1}{6})$, $\mu = 20$ y $\sigma = \sqrt{120 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 4{,}08$. Se cumplen las condiciones $np = 20 \geq 5$ y $nq = 100 \geq 5$. $P(X \geq 25) \approx P(Y > 24{,}5)$ con $z = \dfrac{24{,}5 - 20}{4{,}08} = 1{,}10$. $P = 1 - \Phi(1{,}10) = 1 - 0{,}8643 = 0{,}1357$, aproximadamente el 13,6 %.

Errores muy comunes con binomial y normal

- Aplicar la binomial cuando las pruebas no son independientes, por ejemplo al sacar bolas sin reemplazamiento de una urna pequeña.
- Confundir «al menos uno» con «exactamente uno».
- Olvidar que σ es la desviación típica, no la varianza, al tipificar: $z = (x - \mu)/\sigma$.
- Leer en la tabla $\Phi(z)$ para un z negativo sin aplicar la simetría.
- Usar la aproximación normal sin comprobar $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, o sin corregir por continuidad.

¿Sabías que?

La curva en forma de campana se asocia con Carl Friedrich Gauss, que la usó en 1809 para estudiar los errores de las mediciones astronómicas, aunque Abraham de Moivre ya había descubierto en 1733 que la binomial se acerca a ella. En el siglo XIX, el estadístico Francis Galton construyó una máquina con clavos y bolas, el «tablero de Galton», que muestra cómo las bolas, al caer, forman espontáneamente una campana. Hoy esta distribución aparece en los análisis de calidad, en los exámenes con puntuaciones estandarizadas y en los modelos de riesgo financiero.

El consejo de Otto

Dibuja siempre la campana y sombrea el área que buscas: así sabrás si hay que restar de 1 o restar dos valores de la tabla.