Ejercicios - Distribuciones binomial y normal

Curso: 1 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Distribución de probabilidad

Una tienda de electrodomésticos de Albacete registra cuántas lavadoras vende cada día. La variable X (lavadoras vendidas en un día) tiene la distribución de la tabla, en la que falta el valor de $P(X = 3)$.

x	0	1	2	3
P(X = x)	0,1	0,3	0,4	?

a. Calcula $P(X = 3)$ sabiendo que la suma de probabilidades debe ser 1.
b. Calcula la esperanza $\mu = E(X)$.
c. Calcula la varianza y la desviación típica.
d. Calcula $P(X \geq 2)$.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – La rifa del colegio

En la fiesta de un colegio de Huelva se vende una rifa a 3 € la papeleta. Hay 50 papeletas y un único premio de 100 € (el premio no incluye devolver el precio de la papeleta).

a. Define la variable X = ganancia neta de quien compra una papeleta y escribe su distribución.
b. Calcula la esperanza de X e interprétala.
c. ¿Qué precio de la papeleta haría el juego justo?

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Probabilidades binomiales

Sea X una variable binomial $B(5; 0{,}3)$.

a. Calcula $P(X = 2)$.
b. Calcula $P(X \leq 1)$.
c. Calcula $P(X \geq 1)$ usando el suceso contrario.
d. Calcula la media y la desviación típica.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Examen tipo test

Un examen tipo test de 10 preguntas tiene 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Una alumna responde todas al azar. Sea X el número de aciertos.

a. Justifica que X sigue una distribución binomial e indica sus parámetros.
b. Calcula la probabilidad de acertar exactamente 3 preguntas.
c. Calcula la probabilidad de aprobar (al menos 5 aciertos).
d. Calcula el número esperado de aciertos y la desviación típica.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Tipificar y usar la tabla

Sea X una variable normal $N(100; 15)$.

a. Calcula $P(X < 110)$.
b. Calcula $P(X > 85)$.
c. Calcula $P(90 < X < 120)$.
d. ¿Qué probabilidad hay de que X esté a menos de una desviación típica de la media?

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Problema inverso

La duración de una batería de portátil (en horas) sigue una distribución $N(1000; 50)$.

a. Halla el valor k tal que $P(X < k) = 0{,}90$.
b. Halla el valor k tal que solo el 5 % de las baterías dure menos de k horas.
c. Halla el intervalo centrado en la media que contiene al 95 % de las baterías.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – Control de calidad en una fábrica

En una fábrica de tornillos de Eibar, el 5 % de los tornillos sale defectuoso. Un inspector toma una caja con 12 tornillos elegidos al azar. Sea X el número de tornillos defectuosos de la caja.

a. Indica la distribución de X.
b. Calcula la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso.
c. Calcula la probabilidad de que haya al menos uno defectuoso.
d. Calcula el número esperado de defectuosos y la probabilidad de que haya exactamente dos.

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – La altura de los reclutas

La altura de los jóvenes de 18 años de una ciudad sigue una distribución normal de media 172 cm y desviación típica 7 cm.

a. Calcula el porcentaje de jóvenes que mide más de 180 cm.
b. Calcula el porcentaje de jóvenes que mide entre 165 y 179 cm.
c. En un grupo de 2 000 jóvenes, ¿cuántos se espera que midan menos de 160 cm?
d. ¿A partir de qué altura está el 10 % de los más altos?

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Reservas de un taxi aéreo

Una compañía de avionetas turísticas de Mallorca vende 10 plazas por vuelo. Sabe que cada persona con reserva se presenta con probabilidad 0,92, de forma independiente. Sea X el número de personas que se presentan de las 10 con reserva.

a. Indica la distribución de X.
b. Calcula la probabilidad de que se presenten las 10 personas.
c. Calcula la probabilidad de que se presenten al menos 9.
d. Calcula el número medio de personas que se presentan.

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – El autobús de línea

El tiempo (en minutos) que tarda un autobús urbano de Zaragoza en hacer su recorrido sigue una distribución $N(8; 2)$.

a. Calcula la probabilidad de que tarde menos de 10 minutos.
b. Calcula la probabilidad de que tarde entre 5 y 10 minutos.
c. Calcula la probabilidad de que tarde más de 12 minutos.
d. Si hay 60 viajes al día, ¿en cuántos se espera que tarde más de 12 minutos?

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Una encuesta en el barrio

En un barrio de Sevilla, el 60 % de los vecinos prefiere que la plaza se reforme con más zonas verdes. Se eligen al azar 8 vecinos. Sea X el número de ellos que prefiere las zonas verdes.

a. Indica la distribución de X.
b. Calcula la probabilidad de que exactamente 5 prefieran las zonas verdes.
c. Calcula la probabilidad de que al menos 6 las prefieran.
d. Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – Las notas de un examen

Las notas de un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en un instituto de Valencia siguen una distribución $N(6{,}2;\ 1{,}5)$.

a. Calcula el porcentaje de suspensos (nota inferior a 5).
b. Calcula el porcentaje de alumnos con notable (entre 7 y 9).
c. Si hay 120 alumnos, ¿cuántos se espera que suspendan?
d. ¿Cuál es la nota mínima del 10 % de los mejores alumnos?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – Aproximar la binomial con la normal

En un juego de feria de un pueblo de La Rioja se gana con probabilidad 0,3 en cada intento. Un grupo juega 100 veces. Sea X el número de partidas ganadas.

a. Indica la distribución de X y comprueba que se puede aproximar por una normal.
b. Escribe la normal que aproxima a X.
c. Calcula, con la corrección de continuidad, $P(X \geq 35)$.
d. Calcula $P(25 \leq X \leq 35)$ con la misma aproximación.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Salarios de una empresa

En una empresa de logística de Zaragoza, los salarios mensuales netos siguen una distribución normal de media 1 450 € y desviación típica 200 €.

a. Calcula el porcentaje de empleados que cobra menos de 1 200 €.
b. Calcula el porcentaje que cobra entre 1 300 y 1 700 €.
c. La empresa quiere dar una prima al 10 % que más cobra. ¿A partir de qué sueldo?
d. ¿Qué sueldo deja por debajo al 25 % de los empleados? (usa $z = -0{,}67$)

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – La embotelladora

Una embotelladora de agua de Teruel llena botellas de 500 ml. La cantidad de agua real (en ml) sigue una distribución normal $N(500;\ 4)$. Una botella se rechaza si contiene menos de 495 ml o más de 505 ml. La tabla recoge la producción de un turno.

Dato	Valor
Contenido nominal	500 ml
Rechazo si	menos de 495 ml o más de 505 ml

Dato	Valor
Botellas por turno	10 000

a. Calcula la probabilidad de que una botella contenga menos de 495 ml.
b. Calcula la probabilidad de que contenga más de 505 ml.
c. Calcula la probabilidad de que una botella sea rechazada y cuántas botellas se esperan rechazadas en el turno de 10 000.
d. Para que solo se rechace el 1 % de las botellas, la desviación típica debería reducirse. Calcula su valor (usa $z = 2{,}576$ para el 99 % central).
e. Compara el coste de las botellas rechazadas del turno con el nuevo ajuste si cada rechazada cuesta 0,12 €.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – Eficacia de un tratamiento

Un nuevo tratamiento en un hospital de Cádiz es eficaz en el 85 % de los pacientes, independientemente de unos y otros. Se aplica a 80 pacientes. Sea X el número de pacientes en los que resulta eficaz. Como los cálculos exactos son muy largos, se usará la aproximación normal.

a. Indica la distribución de X y la normal que la aproxima. Comprueba las condiciones.
b. Calcula la probabilidad de que sea eficaz en al menos 72 pacientes.
c. Calcula la probabilidad de que sea eficaz en menos de 64 pacientes.
d. Interpreta con la regla de 2 desviaciones típicas: ¿entre qué valores estará el número de pacientes curados con una probabilidad aproximada del 95 %?

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – Un teatro con sobreventa

Un teatro de Madrid tiene 220 butacas y vende 240 entradas para cada función, porque sabe que el 10 % de los compradores no se presenta. Los compradores actúan de forma independiente. Sea X el número de espectadores que acuden de las 240 entradas vendidas.

a. Indica la distribución de X y su aproximación normal.
b. Calcula la probabilidad de que acudan más de 220 espectadores (hay un problema de aforo).
c. Calcula la probabilidad de que acudan 210 o menos.
d. Si se vendieran solo 235 entradas, ¿qué probabilidad habría de que acudieran más de 220 personas?

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Dos marcas de bombillas

Una cadena de ferreterías de Galicia compara dos marcas de bombillas LED. La duración de la marca A sigue una $N(1200; 100)$ horas y la de la marca B, una $N(1100; 50)$ horas. La tabla resume las condiciones y el precio.

Marca	Distribución	Precio
A	N(1200; 100)	2,50 €
B	N(1100; 50)	2,10 €

a. Calcula la probabilidad de que una bombilla A dure más de 1 000 horas.
b. Calcula la probabilidad de que una bombilla B dure más de 1 000 horas.
c. Calcula la probabilidad de que una A dure entre 1 100 y 1 300 horas y la de que una B dure lo mismo.
d. Si la marca A cuesta 2,50 € y la B 2,10 €, compara la inversión por hora garantizada (tomando la duración media). ¿Qué marca recomiendas?

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – Una prueba de acceso

En una prueba de acceso a una escuela de idiomas, las puntuaciones de los candidatos (sobre 100) siguen una $N(60; 10)$. Se presentan 1 200 candidatos y solo hay 60 plazas. La tabla resume las cuestiones previas.

Dato	Valor
Candidatos	1 200
Plazas	60
Distribución	N(60; 10)

a. ¿Qué porcentaje de candidatos obtiene más de 75 puntos? ¿Cuántos son?
b. ¿Qué porcentaje obtiene entre 50 y 70 puntos?
c. Calcula la puntuación mínima necesaria para obtener una de las 60 plazas (el 5 % de los mejores).
d. Un candidato obtuvo 82 puntos. ¿Qué percentil ocupa aproximadamente?
e. Si la escuela amplía a 120 plazas, ¿cuál sería ahora la nota de corte?

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: aproximación y tamaño de muestra

Resuelve estos retos sobre las distribuciones binomial y normal.

a. Para $X \sim B(20; 0{,}3)$ calcula $P(X \leq 5)$ exactamente y con la aproximación normal con corrección de continuidad. ¿Cuál es el error?
b. ¿Cuántos intentos hacen falta, como mínimo, para que la probabilidad de acertar al menos una vez sea superior al 99 % si cada intento acierta con probabilidad 0,05?
c. Si $X \sim N(\mu; \sigma)$ cumple $P(X < 30) = 0{,}2$ y $P(X < 50) = 0{,}9$, halla μ y σ (usa

$z_{0,8} = 0{,}84$ y $z_{0,9} = 1{,}28$).