Soluciones - Distribuciones binomial y normal

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. La suma de todas las probabilidades debe ser 1: $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 + P(X=3) = 1$, luego $P(X=3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
b. La esperanza es la suma de cada valor por su probabilidad: $\mu = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 = 0 + 0{,}3 + 0{,}8 + 0{,}6 = 1{,}7$ lavadoras al día, como media a largo plazo.
c. Calculamos primero $\sum x_i^2 p_i = 0 + 0{,}3 + 1{,}6 + 1{,}8 = 3{,}7$. La varianza es $\sigma^2 = 3{,}7 - 1{,}7^2 = 3{,}7 - 2{,}89 = 0{,}81$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$ lavadoras.
d. Sumamos las probabilidades de los valores 2 y 3: $P(X \geq 2) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$. El 60 % de los días se venden al menos dos lavadoras.

Solución del ejercicio 2

a. Si toca (probabilidad $\frac{1}{50}$), la ganancia neta es $100 - 3 = 97$ €; si no toca (probabilidad $\frac{49}{50}$), es -3 €. Tabla: $P(97) = 0{,}02$ y $P(-3) = 0{,}98$.
b. $\mu = 97 \cdot 0{,}02 + (-3) \cdot 0{,}98 = 1{,}94 - 2{,}94 = -1$ €. En promedio, cada papeleta supone una pérdida de 1 € (el colegio recauda, en media, 1 € por papeleta más del premio repartido).
c. Es justo si $\mu = 0$: con precio c, $\mu = (100 - c) \cdot 0{,}02 - c \cdot 0{,}98 = 2 - c = 0$, es decir, $c = 2$ €.

Solución del ejercicio 3

a. Fórmula binomial $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ con $q = 0{,}7$: $P(X=2) = \binom{5}{2}\, 0{,}3^2\, 0{,}7^3 = 10 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}343 = 0{,}3087$.
b. Sumamos los casos 0 y 1: $P(X=0) = 0{,}7^5 = 0{,}16807$ y $P(X=1) = 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^4 = 0{,}36015$. Por tanto, $P(X \leq 1) = 0{,}5282$.
c. El contrario de «al menos uno» es «ninguno»: $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}16807 = 0{,}83193$. Así evitamos sumar cinco probabilidades.
d. En una binomial, $\mu = np = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{1{,}05} = 1{,}025$.

Solución del ejercicio 4

a. Hay $n = 10$ pruebas independientes, cada una con dos resultados (acierto o fallo) y probabilidad de acierto constante $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Luego $X \sim B(10; 0{,}25)$.
b. $P(X = 3) = \binom{10}{3} 0{,}25^3\, 0{,}75^7 = 120 \cdot 0{,}015625 \cdot 0{,}133484 = 0{,}2503$. Hay una probabilidad del 25 % de acertar exactamente 3.
c. Usamos el suceso contrario: $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}9219 = 0{,}0781$. Es una probabilidad pequeña (menos del 8 %): aprobar respondiendo al azar es difícil.
d. $\mu = np = 10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$ aciertos y $\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{1{,}875} = 1{,}369$.

Solución del ejercicio 5

a. Tipificamos con $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$: $z = \dfrac{110 - 100}{15} = 0{,}67$. En la tabla, $P(Z < 0{,}67) = 0{,}7486$.
b. $z = \dfrac{85 - 100}{15} = -1$. Por la simetría de la normal, $P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0{,}8413$.
c. Tipificamos los dos extremos: $z_1 = \dfrac{90 - 100}{15} = -0{,}67$ y $z_2 = \dfrac{120 - 100}{15} = 1{,}33$. Entonces $P = \Phi(1{,}33) - \Phi(-0{,}67) = 0{,}9082 - 0{,}2514 = 0{,}6568$.
d. Se pide $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$, es decir, el 68,26 %, como indica la regla del 68-95-99,7.

Solución del ejercicio 6

a. Buscamos en el interior de la tabla el valor $\Phi(z) = 0{,}90$ y obtenemos $z = 1{,}28$. Destipificamos: $k = \mu + z\sigma = 1000 + 1{,}28 \cdot 50 = 1064$ horas.
b. Ahora $P(X < k) = 0{,}05$, así que z es negativo: $z = -1{,}645$. Entonces $k = 1000 - 1{,}645 \cdot 50 = 917{,}75$; solo el 5 % de las baterías dura menos de unas 918 horas.
c. Para el 95 % central queda un 2,5 % en cada cola, luego $z = \pm 1{,}96$: $1000 \pm 1{,}96 \cdot 50 = 1000 \pm 98$. El intervalo es $(902,\ 1098)$ horas.

Solución del ejercicio 7

a. Cada tornillo es defectuoso o no, con probabilidad constante 0,05, y los 12 tornillos son independientes. Por tanto, $X \sim B(12; 0{,}05)$.
b. Ninguno defectuoso significa que los 12 son correctos: $P(X = 0) = 0{,}95^{12} = 0{,}5404$.

c. Por el suceso contrario: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}5404 = 0{,}4596$. Casi la mitad de las cajas contiene algún defectuoso.
d. La media es $\mu = np = 12 \cdot 0{,}05 = 0{,}6$ tornillos por caja. Además, $P(X = 2) = \binom{12}{2} 0{,}05^2\, 0{,}95^{10} = 66 \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}598737 = 0{,}0988$, casi un 10 %.

Solución del ejercicio 8

a. Tipificamos: $z = \dfrac{180 - 172}{7} = 1{,}14$.
$P(X > 180) = 1 - \Phi(1{,}14) = 1 - 0{,}8729 = 0{,}1271$, es decir, el 12,71 % mide más de 180 cm.
b. $z_1 = \dfrac{165 - 172}{7} = -1$ y $z_2 = \dfrac{179 - 172}{7} = 1$. $P = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}6826$, es decir, el $68{,}26\,\%$.
c. $z = \dfrac{160 - 172}{7} = -1{,}71$ y $P = \Phi(-1{,}71) = 0{,}0436$. El número esperado es $2000 \cdot 0{,}0436 = 87{,}2$, unos 87 jóvenes.
d. Se busca $P(X > k) = 0{,}10$, es decir, $\Phi(z) = 0{,}90$ y $z = 1{,}28$. Destipificando, $k = 172 + 1{,}28 \cdot 7 = 180{,}96$ cm: el 10 % más alto mide a partir de unos 181 cm.

Solución del ejercicio 9

a. Cada una de las 10 personas se presenta o no, con probabilidad constante 0,92 e independencia. Por tanto, $X \sim B(10; 0{,}92)$.
b. Deben presentarse todas: $P(X = 10) = 0{,}92^{10} = 0{,}4344$.
c. Sumamos los casos 9 y 10:
$P(X \geq 9) = \binom{10}{9} 0{,}92^9 \cdot 0{,}08 + 0{,}92^{10} = 0{,}3777 + 0{,}4344 = 0{,}8121$. En el 81 % de los vuelos se presentan 9 o 10 personas.
d. La media de una binomial es np: $\mu = 10 \cdot 0{,}92 = 9{,}2$ personas por vuelo.

Solución del ejercicio 10

a. Tipificamos: $z = \dfrac{10 - 8}{2} = 1$, y $P(X < 10) = \Phi(1) = 0{,}8413$.
b. $z_1 = \dfrac{5 - 8}{2} = -1{,}5$ y $z_2 = 1$. Restamos áreas:
$P = \Phi(1) - \Phi(-1{,}5) = 0{,}8413 - 0{,}0668 = 0{,}7745$.
c. $z = \dfrac{12 - 8}{2} = 2$. $P(X > 12) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$, un 2,28 %.
d. Multiplicamos el número de viajes por la probabilidad: $60 \cdot 0{,}0228 = 1{,}37$. Se esperan entre 1 y 2 viajes al día de más de 12 minutos.

Solución del ejercicio 11

a. Cada vecino prefiere o no las zonas verdes, con probabilidad 0,6, de forma independiente: $X \sim B(8; 0{,}6)$.
b. $P(X = 5) = \binom{8}{5}\, 0{,}6^5\, 0{,}4^3 = 56 \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 = 0{,}2787$.
c. Sumamos los tres casos:
$P(X \geq 6) = P(6) + P(7) + P(8) = 0{,}2090 + 0{,}0896 + 0{,}0168 = 0{,}3154$. Hay un 31,5 % de probabilidad de que al menos 6 las prefieran.
d. $\mu = np = 8 \cdot 0{,}6 = 4{,}8$ vecinos; $\sigma^2 = npq = 8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 1{,}92$; $\sigma = \sqrt{1{,}92} = 1{,}386$.

Solución del ejercicio 12

a. Tipificamos la nota 5: $z = \dfrac{5 - 6{,}2}{1{,}5} = -0{,}8$. $P = \Phi(-0{,}8) = 1 - 0{,}7881 = 0{,}2119$: suspende el 21,19 %.
b. $z_1 = \dfrac{7 - 6{,}2}{1{,}5} = 0{,}53$ y $z_2 = \dfrac{9 - 6{,}2}{1{,}5} = 1{,}87$.
$P = \Phi(1{,}87) - \Phi(0{,}53) = 0{,}9693 - 0{,}7019 = 0{,}2674$: el 26,74 % saca notable.
c. $120 \cdot 0{,}2119 = 25{,}4$: se esperan unos 25 suspensos.
d. El 10 % superior corresponde a $\Phi(z) = 0{,}90$, es decir, $z = 1{,}28$. Destipificando: $6{,}2 + 1{,}28 \cdot 1{,}5 = 8{,}12$. La nota mínima de ese grupo es de unos 8,1.

Solución del ejercicio 13

a. $X \sim B(100; 0{,}3)$. Se cumple $np = 30 \geq 5$ y $nq = 70 \geq 5$, así que la aproximación normal es aceptable.
b. $\mu = np = 30$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{21} = 4{,}583$. Entonces $X \approx N(30;\, 4{,}583)$.
c. Con la corrección de continuidad, el valor 35 ocupa el intervalo $(34{,}5;\, 35{,}5)$:
$P(X \geq 35) \approx P(X' > 34{,}5)$, con $z = \dfrac{34{,}5 - 30}{4{,}583} = 0{,}98$.
$P = 1 - \Phi(0{,}98) = 1 - 0{,}8365 = 0{,}1635$.
d. $P(24{,}5 < X' < 35{,}5)$: $z_1 = -1{,}20$ y $z_2 = 1{,}20$.
$P = \Phi(1{,}20) - \Phi(-1{,}20) = 0{,}8849 - 0{,}1151 = 0{,}7698$.

Solución del ejercicio 14

a. $z = \dfrac{1200 - 1450}{200} = -1{,}25$. $P = \Phi(-1{,}25) = 0{,}1056$: el 10,56 % cobra menos de 1 200 €.
b. $z_1 = \dfrac{1300 - 1450}{200} = -0{,}75$ y $z_2 = \dfrac{1700 - 1450}{200} = 1{,}25$.
$P = \Phi(1{,}25) - \Phi(-0{,}75) = 0{,}8944 - 0{,}2266 = 0{,}6678$, el 66,78 %.

c. El valor $z = 1{,}28$ deja a su derecha el 10 %. Destipificamos: $1450 + 1{,}28 \cdot 200 = 1706$ €. La prima se da a partir de 1 706 €.
d. $1450 - 0{,}67 \cdot 200 = 1316$ €: el 25 % de los empleados cobra menos de unos 1 316 €.

Solución del ejercicio 15

a. $z = \dfrac{495 - 500}{4} = -1{,}25$. $P(X < 495) = \Phi(-1{,}25) = 0{,}1056$.
b. $z = \dfrac{505 - 500}{4} = 1{,}25$. $P(X > 505) = 1 - \Phi(1{,}25) = 0{,}1056$, igual que antes por la simetría.
c. Los dos sucesos son incompatibles: $P(\text{rechazo}) = 0{,}1056 + 0{,}1056 = 0{,}2112$. En 10 000 botellas se esperan $10\,000 \cdot 0{,}2112 = 2112$ rechazadas.
d. Se pide $P(|X - 500| > 5) = 0{,}01$, es decir, que 505 esté a 2,576 desviaciones de la media: $\dfrac{5}{\sigma} = 2{,}576$, luego $\sigma = \dfrac{5}{2{,}576} = 1{,}94$ ml.
e. Ahora: $2112 \cdot 0{,}12 = 253{,}44$ €. Con el nuevo ajuste habría 100 rechazadas: $100 \cdot 0{,}12 = 12$ €. Se ahorrarían 241,44 € por turno.

Solución del ejercicio 16

a. $X \sim B(80; 0{,}85)$. Como $np = 68 \geq 5$ y $nq = 12 \geq 5$, se aproxima por $N(68;\, \sqrt{80 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15}) = N(68;\, 3{,}194)$.
b. Con corrección de continuidad, $P(X \geq 72) \approx P(X' > 71{,}5)$, con $z = \dfrac{71{,}5 - 68}{3{,}194} = 1{,}10$. $P = 1 - \Phi(1{,}10) = 1 - 0{,}8643 = 0{,}1357$.
c. $P(X < 64) = P(X \leq 63) \approx P(X' < 63{,}5)$, con $z = \dfrac{63{,}5 - 68}{3{,}194} = -1{,}41$. $P = \Phi(-1{,}41) = 0{,}0793$.
d. Entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$ está aproximadamente el 95 % de los casos: $68 \pm 2 \cdot 3{,}194 = 68 \pm 6{,}4$. El número de curados estará, casi seguro, entre 62 y 74 pacientes.

Solución del ejercicio 17

a. $X \sim B(240; 0{,}9)$, con $\mu = 240 \cdot 0{,}9 = 216$ y $\sigma = \sqrt{240 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = 4{,}648$. Como np y nq superan 5, $X \approx N(216;\, 4{,}648)$.
b. $P(X > 220) = P(X \geq 221) \approx P(X' > 220{,}5)$, con $z = \dfrac{220{,}5 - 216}{4{,}648} = 0{,}97$. $P = 1 - \Phi(0{,}97) = 0{,}1660$: en una de cada seis funciones hay problema de aforo.
c. $P(X \leq 210) \approx P(X' < 210{,}5)$, con $z = \dfrac{210{,}5 - 216}{4{,}648} = -1{,}18$.

$P = \Phi(-1{,}18) = 0{,}1190$.

d. Con 235 entradas: $\mu = 211{,}5$ y $\sigma = \sqrt{235 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = 4{,}599$. $z = \dfrac{220{,}5 - 211{,}5}{4{,}599} = 1{,}96$ y $P = 1 - \Phi(1{,}96) = 0{,}0250$. El riesgo baja del 16,6 % al 2,5 %.

Solución del ejercicio 18

a. $z = \dfrac{1000 - 1200}{100} = -2$. $P(A > 1000) = 1 - \Phi(-2) = 1 - 0{,}0228 = 0{,}9772$.

b. $z = \dfrac{1000 - 1100}{50} = -2$. $P(B > 1000) = 0{,}9772$, igual que A.

c. A: $z_1 = -1$, $z_2 = 1$: $P = 0{,}6826$. B: $z_1 = 0$, $z_2 = \dfrac{1300 - 1100}{50} = 4$: $P = \Phi(4) - \Phi(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

d. A: $\dfrac{2{,}50}{1200} = 0{,}00208$ €/h. B: $\dfrac{2{,}10}{1100} = 0{,}00191$ €/h. B es algo más barata por hora media, pero A es más fiable en el intervalo central y tiene más vida media. Una recomendación razonable es A si se prioriza la duración y B si se prioriza el precio.

Solución del ejercicio 19

a. $z = \dfrac{75 - 60}{10} = 1{,}5$. $P = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$: el 6,68 %, unos $1200 \cdot 0{,}0668 = 80$ candidatos.

b. $z_1 = -1$ y $z_2 = 1$: $P = 0{,}6826$, el 68,26 %.

c. 60 plazas de $1\,200$ son el 5 %. $z = 1{,}645$: $60 + 1{,}645 \cdot 10 = 76{,}45$. Hacen falta unos 76,5 puntos.

d. $z = \dfrac{82 - 60}{10} = 2{,}2$. $\Phi(2{,}2) = 0{,}9861$: percentil 98,6 (supera al 98,6 % de los candidatos).

e. 120 plazas son el 10 %: $z = 1{,}28$, nota $60 + 12{,}8 = 72{,}8$ puntos.

Solución del ejercicio 20

a. Sumando las probabilidades binomiales de 0 a 5 se obtiene $P(X \leq 5) = 0{,}4164$. Para aproximar: $\mu = 6$, $\sigma = \sqrt{4{,}2} = 2{,}05$ y $P(X' < 5{,}5)$, con $z = \dfrac{5{,}5 - 6}{2{,}05} = -0{,}24$ y $\Phi(-0{,}24) = 0{,}4052$. El error es $0{,}4164 - 0{,}4052 = 0{,}0112$, unas 11 milésimas, porque n es pequeño.

b. $P(\text{al menos uno}) = 1 - 0{,}95^n > 0{,}99$ equivale a $0{,}95^n < 0{,}01$. Con logaritmos (y cambiando el sentido al dividir por $\ln 0{,}95 < 0$): $n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}95} = 89{,}78$. Hacen falta

90 intentos.

c. Tipificando: $\frac{30-\mu}{\sigma} = -0{,}84$ y $\frac{50-\mu}{\sigma} = 1{,}28$. Restando: $\frac{20}{\sigma} = 2{,}12$, luego $\sigma = 9{,}43$ y $\mu = 30 + 0{,}84 \cdot 9{,}43 = 37{,}92$.