Soluciones del examen - Derivadas

Curso: 1 Bachillerato Ccss · Duración: 55 minutos · /20

Solución del ejercicio 1 (4 puntos)

a. Escribimos $f(x) = 5x^3 - 2x^{-1} + x^{1/2}$ y aplicamos la regla de la potencia a cada término: $f'(x) = 15x^2 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. La derivada de $-2x^{-1}$ es $2x^{-2}$ y la de $x^{1/2}$ es $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; la derivada solo existe para $x > 0$.

b. Regla del cociente con $u = x^2 + 3$, $v = x - 1$: $g'(x) = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$. Comprobación del numerador: $2x^2 - 2x - x^2 - 3 = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$; la derivada no existe en $x = 1$.

c. Derivada del logaritmo por la regla de la cadena, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$: $h'(x) = \dfrac{6x}{3x^2+1}$. Aquí $u = 3x^2 + 1$ y $u' = 6x$; como $3x^2 + 1 > 0$, h está definida en todo $\mathbb{R}$.

d. Regla del producto: $k'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}\,e^x$. Sacando factor común, $k'(x) = e^x\,\dfrac{1 + 2x}{2\sqrt{x}}$. Para sacar factor común se escribe $\sqrt{x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x}}$.

Solución del ejercicio 2 (4 puntos)

a. $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 2x$.

b. Punto: $f(1) = 0 + 1 = 1$. Pendiente: $f'(1) = 1 + 2 = 3$. Tangente: $y - 1 = 3(x - 1)$, es decir, $y = 3x - 2$.

c. Resolvemos $\dfrac{1}{x} + 2x = 3$; multiplicando por x: $1 + 2x^2 = 3x$, es decir, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, con soluciones $x = 1$ y $x = \dfrac{1}{2}$. La pendiente vale 3 en los puntos $(1, 1)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \ln 2\right)$. Comprobación: $f'(\frac{1}{2}) = 2 + 1 = 3$.

d. $\dfrac{1}{x} + 2x = 0$ lleva a $2x^2 = -1$, que no tiene solución real; además $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$. Por tanto, no hay ningún punto con tangente horizontal.

Solución del ejercicio 3 (4 puntos)

a. $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$. Sus raíces son $x = 1$ y $x = 2$.

b. Estudiamos el signo de f' en cada intervalo: positivo en $(-\infty, 1)$, negativo en

$(1,2)$ y positivo en $(2,+\infty)$. Por tanto, f crece en $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(1,2)$.

c. En $x=1$ la función pasa de crecer a decrecer: máximo relativo en $(1,5)$, porque $f(1)=2-9+12=5$. En $x=2$ pasa de decrecer a crecer: mínimo relativo en $(2,4)$, porque $f(2)=16-36+24=4$.

Solución del ejercicio 4 (4 puntos)

a. Derivamos término a término: $B'(q)=-0{,}02q+3$.

b. El máximo se busca donde la derivada se anula: $-0{,}02q+3=0$, luego $q=\dfrac{3}{0{,}02}=150$ bicicletas.

c. $B(150)=-0{,}01\cdot 22\,500+450-50=-225+450-50=175$ €. El beneficio máximo es de 175 € al mes.

d. $B'>0$ si $q<150$ y $B'<0$ si $q>150$: el beneficio crece y después decrece. También basta observar que B es una parábola con coeficiente principal negativo. Es un máximo.

Solución del ejercicio 5 (4 puntos)

a. $V(2)=-8+48=40$ y $V(6)=-216+432=216$ (cientos de euros), es decir, 4 000 € y 21 600 €.

b. $V'(t)=-3t^2+24t$ y $V'(2)=-12+48=36$: el segundo día las ventas aumentan a un ritmo de unos 3 600 € por día.

c. $-3t^2+24t=-3t(t-8)=0$ implica $t=0$ o $t=8$. Máximo en $t=8$: $V(8)=-512+768=256$, es decir, 25 600 €. Comprobación: V' pasa de positiva a negativa en $t=8$, luego es un máximo.

d. $V'>0$ en $(0,8)$ (crecen) y $V'<0$ en $(8,12)$ (decrecen).