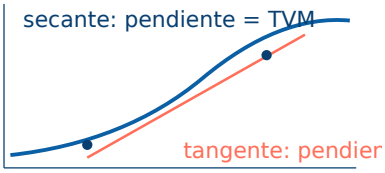
Apuntes - Derivadas

Curso: 1 Bachillerato Ccss

La derivada mide la rapidez con que cambia una función. En economía permite hallar costes e ingresos marginales y, sobre todo, resolver problemas de optimización: beneficio máximo, coste mínimo, mejor tamaño de un envase.

Actividad de introducción: la velocidad que marca el radar

Un radar de tramo en una autovía de Castilla mide el tiempo que tarda un coche en recorrer 10 km: 5 minutos. La velocidad media es de 120 km/h, pero eso no dice nada de lo rápido que iba el coche en un momento concreto: pudo frenar y acelerar muchas veces. Para saber cuánto marcaba el velocímetro en un instante hay que mirar intervalos cada vez más pequeños, 1 minuto, 10 segundos, 1 segundo, y comprobar a qué valor se acercan las velocidades medias. Ese valor límite es la derivada. En economía se usa de la misma manera: el coste de fabricar una unidad más (coste marginal), el ritmo de crecimiento de las ventas o el momento en que un beneficio es máximo. En este tema aprenderás a calcular derivadas, a interpretar su significado y a usarlas para optimizar.



Tasa de variación media y derivada en un punto

Definición: tasa de variación media

La **tasa de variación media** (TVM) de f en $[a,b]$ es $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$: lo que cambia f por unidad de x, en promedio. Es la pendiente de la *secante* que une $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$.

Definición: derivada en un punto

La **derivada** de f en $x=a$ es

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Mide la **tasa de variación instantánea** y es la pendiente de la **recta tangente** en $(a,f(a))$. En economía, $C'(x)$ es el **coste marginal** y $I'(x)$ el ingreso marginal.

Ejemplo 1

Calcula $f'(3)$ para $f(x) = x^2$ con la definición.

$\dfrac{(3+h)^2 - 9}{h} = \dfrac{6h + h^2}{h} = 6 + h \to 6$. Luego $f'(3) = 6$.

Reglas de derivación

Regla: tabla de derivadas

Función	Derivada
k (constante)	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

Regla: operaciones

- Suma y múltiplo: $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(kf)' = kf'$.
- Producto: $(fg)' = f'g + fg'$.
- Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Cadena: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Ejemplo 2

Deriva $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

$f'(x) = \dfrac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$.

Ejemplo 3: cadena

Deriva $g(x) = e^{x^2}$ y $h(x) = (3x-2)^5$.

$g'(x) = 2x\,e^{x^2}$. $h'(x) = 5(3x-2)^4 \cdot 3 = 15(3x-2)^4$.

Ejemplo 4: producto y logaritmo

Deriva $f(x) = x\,e^x$ y $g(x) = x^2 \ln x$.

Con la regla del producto: $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$.

$g'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \ln x + x$. En ambos casos se deriva cada factor por separado y se combinan según la fórmula, sin simplificar antes de tiempo.

Ejemplo 5: tasa de variación en contexto

Las ventas (en miles de €) son $V(t) = 2t^2 + 3$ con t en años. Compara la variación media entre $t = 1$ y $t = 4$ con la rapidez en $t = 4$.

TVM: $\dfrac{V(4) - V(1)}{3} = \dfrac{35 - 5}{3} = 10$ miles de € por año. Rapidez instantánea: $V'(t) = 4t \Rightarrow V'(4) = 16$ miles de € por año. En $t = 4$ las ventas crecen más deprisa que la media del periodo, porque la función es creciente y se acelera.

¡Atención!

La derivada de un producto **no** es el producto de las derivadas: $(fg)' \neq f'g'$. En la regla de la cadena no olvides multiplicar por la derivada interior.

Recta tangente

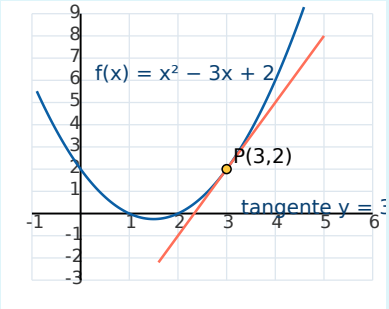
Método: recta tangente en $x = a$

1. Calcula $f(a)$.
2. Deriva y calcula $f'(a)$ (la pendiente).
3. Escribe $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ y simplifica.

Ejemplo 6

Tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $x = 3$.

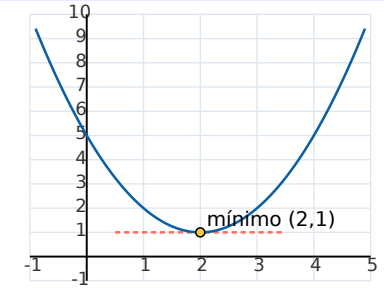
$f(3) = 2$; $f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(3) = 3$. $y - 2 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 7$.



Crecimiento, decrecimiento y extremos

Teorema: signo de la derivada

Si $f' > 0$ en un intervalo, f **crece**; si f', **decrece**. Los **puntos críticos** cumplen $f'(x) = 0$ (tangente horizontal). Si f' pasa de $+$ a $-$ hay un **máximo relativo**; si pasa de $-$ a $+$, un **mínimo relativo**.



Método: estudio de extremos

1. Calcula $f'(x)$.
2. Resuelve $f'(x) = 0$.
3. Estudia el signo de f' en los intervalos que determinan las raíces.
4. Clasifica cada punto y calcula el valor de f en él.

Ejemplo 7

Extremos de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

$f' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$, con raíces -1 y 3. Signo: $+$ en $(-\infty, -1)$, $-$ en $(-1, 3)$, $+$ en $(3, +\infty)$. Máximo relativo en $x = -1$ (valor 10) y mínimo relativo en $x = 3$ (valor -22).

Optimización

Método: problema de optimización

1. Escribe la función a optimizar con una sola variable.
2. Deriva e iguala a cero.
3. Comprueba con el signo de la derivada si es máximo o mínimo.
4. Interpreta el resultado con sus unidades.

Ejemplo 8: beneficio máximo

$B(x) = -x^2 + 60x - 500$. ¿Qué producción maximiza el beneficio?

$B'(x) = -2x + 60 = 0 \Rightarrow x = 30$. Antes de 30 la derivada es positiva y después

negativa: máximo, $B(30) = 400$ €.

Ejemplo 9: coste marginal

$C(x) = 0{,}1x^2 + 4x + 200$. **Coste marginal con 50 unidades.**

$C'(x) = 0{,}2x + 4 \Rightarrow C'(50) = 14$: la unidad 51 cuesta aproximadamente 14 €. No coincide con el coste medio $C(x)/x$.

Observación

La condición $B'(x) = 0$ con $B = I - C$ significa $I' = C'$: ingreso marginal igual a coste marginal. Mientras producir una unidad más aporta más ingreso que coste conviene seguir; cuando ocurre lo contrario, conviene parar. Para estudiar una función completa: dominio, cortes con los ejes, signo de f', extremos y asíntotas.

Ampliación: significado económico de la derivada

Definición: funciones marginales y medias

Si $C(q)$ es el coste de producir q unidades, el **coste marginal** es $C'(q)$: el coste aproximado de fabricar una unidad más. El **coste medio** es . De la misma forma se definen el ingreso marginal $I'(q)$ y el beneficio marginal $B'(q)$. Si el beneficio marginal es positivo conviene producir más; si es negativo, menos; y si es nulo, se está en un posible óptimo.

Ejemplo 10

El coste de producir q litros de zumo es $C(q) = 0{,}01q^2 + 2q + 50$ euros. ¿Cuánto cuesta aproximadamente producir el litro 201?

El coste marginal es $C'(q) = 0{,}02q + 2$. Para $q = 200$: $C'(200) = 4 + 2 = 6$ €. El litro 201 cuesta unos 6 €. Calculado de forma exacta:
$C(201) - C(200) = (0{,}01 \cdot 40401 + 402 + 50) - (400 + 400 + 50) = 856{,}01 - 850 = 6{,}01$ €. La aproximación es muy buena.

Es importante no confundir el coste medio con el coste marginal. Si una empresa tiene un coste medio de 8 € por unidad pero un coste marginal de 6 €, producir una unidad más baja el coste medio, porque la nueva unidad cuesta menos que el promedio. Cuando el coste marginal supera al medio, producir más lo sube. Por eso el mínimo del coste medio aparece justamente donde ambos coinciden.

Ampliación: derivadas con exponenciales y logaritmos

Regla: derivadas de e^x y $\ln x$ con la cadena

Para una función $u(x)$ derivable: $(e^u)' = u'e^u$ y $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. Para una potencia, $(u^n)' = n\,u^{n-1}u'$ y para una raíz, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. La regla de la cadena indica que se deriva «de fuera hacia dentro» y se multiplica por la derivada de lo de dentro.

Ejemplo 11

Deriva $f(x) = \sqrt{x^2+9}\,e^{-x}$.

Aplicamos el producto: $f' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}e^{-x} + \sqrt{x^2+9}\,(-e^{-x})$. Sacamos factor común e^{-x}: $f' = e^{-x}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} - \sqrt{x^2+9}\right) = e^{-x}\,\dfrac{x-(x^2+9)}{\sqrt{x^2+9}} = e^{-x}\,\dfrac{-x^2+x-9}{\sqrt{x^2+9}}$. El discriminante de $-x^2+x-9$ es negativo, así que $f' < 0$ siempre: f es decreciente en toda la recta.

Ampliación: cómo estudiar una función con derivadas

Método: estudio de una función y representación aproximada

1. Halla el dominio de f y los puntos de corte con los ejes.
2. Calcula $f'(x)$ y resuelve $f'(x) = 0$ (los puntos críticos).
3. Estudia el signo de f' en los intervalos que determinan los puntos críticos y los puntos fuera del dominio.
4. Clasifica: de $+$ a $-$ es máximo relativo; de $-$ a $+$ es mínimo relativo.
5. Calcula las ordenadas de los extremos y dibuja la gráfica uniendo los puntos.

Ejemplo 12

Estudia $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ en lo que se refiere a crecimiento y extremos.

El dominio es $x \neq 2$. Derivando: $f'(x) = \dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. Se anula en $x = 0$ y $x = 4$. El denominador es positivo siempre, luego el signo lo da $x(x-4)$: positivo si $x < 0$, negativo si $0 < x < 4$ (excepto $x = 2$) y positivo si $x > 4$. Por tanto, crece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, 4)$. Máximo relativo en $(0, 0)$ y mínimo relativo en $(4, 8)$.

Ampliación: leer y redactar una solución de optimización

Un problema de optimización no termina cuando se obtiene el valor de x. En los exámenes de Bachillerato se valora que el alumno siga siempre el mismo guion: primero define la

incógnita con sus unidades, después escribe la función que se quiere maximizar o minimizar utilizando una sola variable, a continuación calcula la derivada y la iguala a cero, comprueba con el signo de la derivada o con el valor de la función en los extremos del dominio que el punto es realmente un máximo o un mínimo, y por último responde con una frase que incluya las unidades y el contexto: «el beneficio máximo es de 2 800 € y se consigue fabricando 80 mochilas al mes».

Método: comprobar que un punto crítico es máximo o mínimo

1. Escribe $f'(x)$ factorizada para ver su signo con facilidad.
2. Elige un número a la izquierda y otro a la derecha del punto crítico y calcula el signo de f' en cada uno.
3. Si el signo pasa de $+$ a $-$, hay un máximo; si pasa de $-$ a $+$, un mínimo; si no cambia, no hay extremo.
4. Si el dominio es un intervalo cerrado, compara también los valores de f en los extremos del intervalo.

Conviene también hacerse preguntas de sentido común. Si el modelo dice que una tienda vende mejor con un precio negativo o que una caja tiene una altura mayor que el lado de la cartulina, el resultado no pertenece al dominio y hay que descartarlo. Y si el coste marginal resulta ser mayor que el ingreso marginal, producir una unidad más hace perder dinero: la decisión sensata es producir menos hasta que ambos se igualen.

Errores muy comunes con las derivadas

- Derivar un producto como producto de derivadas: $(fg)' \neq f'g'$.
- Olvidar multiplicar por la derivada de lo de dentro en la regla de la cadena: $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, no e^{3x}.
- Pensar que $f'(a) = 0$ garantiza un extremo: hay que comprobar que el signo cambia.
- En problemas de optimización, dar como respuesta el valor de x y no interpretar el resultado: la pregunta suele pedir el beneficio, el precio o las dimensiones.
- No comprobar que la solución pertenece al dominio del problema.

¿Sabías que?

La derivada nació en el siglo XVII, cuando Isaac Newton y Gottfried Leibniz la inventaron por separado, uno para estudiar el movimiento de los planetas y el otro con la idea de las pendientes de las curvas. Hoy los economistas la usan para fijar precios y las empresas de reparto para minimizar kilómetros y combustible. La notación f' se debe a Lagrange y la notación $\frac{dy}{dx}$, a Leibniz.

El consejo de Otto

En los problemas de optimización, escribe siempre una frase final con unidades: «el

beneficio máximo es 400 € y se logra con 30 unidades».