Ejercicios - Derivadas

Curso: 1 Bachillerato Ccss · 20

Se debe mostrar el desarrollo de cada ejercicio.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 – Tasa de variación media

Sea la función $f(x) = x^2 - 3x$. Estudia cómo varía entre distintos puntos.

a. Calcula $f(1)$, $f(3)$ y $f(4)$.
b. Calcula la tasa de variación media (TVM) en $[1, 4]$ y en $[1, 3]$.
c. Interpreta geométricamente el resultado de $[1, 4]$.
d. Calcula la TVM en $[1, 1+h]$ y deduce a qué valor se acerca cuando h tiende a 0.

Ejercicio 2

Ejercicio 2 – Derivada como límite

Calcula, usando la definición $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, las derivadas siguientes.

a. $f(x) = x^2$ en $a = 3$.
b. $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$.
c. $f(x) = 5x - 2$ en un punto cualquiera a.

Ejercicio 3

Ejercicio 3 – Reglas básicas

Aplica la regla de la potencia y las reglas de la suma y del producto por un número.

a. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$
b. $g(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} - 2x$
c. $h(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5}{x} + 9$
d. Calcula $f'(1)$ y $g'(4)$.

Ejercicio 4

Ejercicio 4 – Producto y cociente

Deriva y simplifica cuando sea posible.

a. $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$

b. $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$
c. $h(x) = x\sqrt{x}$
d. Comprueba el apartado a) desarrollando antes el producto.

Ejercicio 5

Ejercicio 5 – Regla de la cadena

Deriva aplicando la regla de la cadena.

a. $f(x) = (3x^2 - 1)^4$
b. $g(x) = e^{2x}$
c. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$
d. $k(x) = x\,e^{-x}$

Ejercicio 6

Ejercicio 6 – Recta tangente

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x$.

a. Calcula $f'(x)$.
b. Halla la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.
c. ¿En qué puntos la tangente es horizontal?
d. Escribe la ecuación de esas rectas tangentes horizontales.

Ejercicio 7

Ejercicio 7 – La velocidad de un coche

Un coche sale de una gasolinera de Burgos y su distancia al punto de partida (en metros) viene dada por $s(t) = 2t^2 + 3t$, con t en segundos.

a. Calcula la velocidad media entre $t = 0$ y $t = 4$.
b. Calcula la velocidad instantánea $s'(t)$ y su valor en $t = 4$.
c. Compara los dos resultados y explica la diferencia.
d. ¿En qué instante la velocidad instantánea es de 15 m/s?

Ejercicio 8

Ejercicio 8 – El coste marginal

Una pequeña fábrica de bicicletas de Eibar tiene un coste de producción (en euros) de $C(q) = 0{,}02q^2 + 5q + 300$ para q unidades al mes.

a. Calcula el coste de producir 100 bicicletas.
b. Calcula el coste marginal $C'(q)$ y evalúalo en $q = 100$.

c. Calcula el coste real de fabricar la unidad 101 y compáralo con el anterior.
d. Interpreta $C'(100)$ en este contexto.

Ejercicio 9

Ejercicio 9 – Ingreso marginal en una zapatería

Una zapatería de Logroño comprueba que, si fija un precio que le permite vender q pares a la semana, el ingreso (en euros) es $I(q) = 60q - \frac{1}{2}q^2$.

a. Calcula el ingreso al vender 20 pares.
b. Calcula el ingreso marginal $I'(q)$ y su valor en $q = 20$.
c. ¿Para qué valor de q el ingreso marginal es nulo?
d. Interpreta el resultado del apartado c).

Ejercicio 10

Ejercicio 10 – Crecimiento de una población

La población de un pueblo de la sierra de Gredos viene dada por $P(t) = 1000\,e^{0{,}03t}$ habitantes, donde t son los años desde 2020.

a. Calcula la población en 2020 y en 2030 (redondea al entero).
b. Calcula la tasa de variación media entre 2020 y 2030.
c. Calcula $P'(t)$ y el ritmo de crecimiento en 2030.
d. Demuestra que $P'(t) = 0{,}03\,P(t)$ e interpreta esta relación.

Ejercicio 11

Ejercicio 11 – Crecimiento y extremos

Estudia la monotonía de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a. Calcula $f'(x)$ y resuelve $f'(x) = 0$.
b. Estudia el signo de f' en cada intervalo.
c. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d. Calcula las coordenadas de los máximos y mínimos relativos.

Ejercicio 12

Ejercicio 12 – El beneficio de una cafetería

En una cafetería de Santander, el beneficio mensual (en euros) al servir q cientos de desayunos es $B(q) = -q^2 + 60q - 500$.

a. Calcula $B(10)$ y $B(50)$ e interpreta los resultados.
b. Calcula $B'(q)$ y resuelve $B'(q) = 0$.
c. Comprueba que es un máximo y calcula el beneficio máximo.

d. ¿Entre qué valores de q hay beneficio positivo?

Ejercicio 13

Ejercicio 13 – El tiro de una jugadora de baloncesto

Una jugadora del equipo de un instituto de Vitoria lanza a canasta. La altura del balón (en metros) a una distancia horizontal x (en metros) del punto de lanzamiento es $y(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 2$.

a. Calcula la altura del balón al salir de las manos.
b. Calcula $y'(x)$ y la pendiente de la trayectoria al lanzar ($x = 0$).
c. Halla la distancia a la que el balón alcanza su altura máxima y cuánto vale.
d. Escribe la ecuación de la recta tangente a la trayectoria en $x = 2$.

Ejercicio 14

Ejercicio 14 – Un medicamento en la sangre

Tras tomar un comprimido, la concentración de un medicamento en sangre (en mg/L) a las t horas es $c(t) = \dfrac{20t}{t^2 + 4}$, para $t \geq 0$.

a. Calcula la concentración a la 1 hora y a las 4 horas.
b. Calcula $c'(t)$ con la regla del cociente y simplifica.
c. Halla en qué instante la concentración es máxima y cuánto vale.
d. Indica en qué intervalo la concentración aumenta y en cuál disminuye.

Ejercicio 15

Ejercicio 15 – El corral de las gallinas

Una granja de Extremadura dispone de 200 m de malla para construir un corral rectangular que se apoya en el muro de un almacén, de modo que solo hay que vallar tres lados: dos lados perpendiculares al muro de longitud x metros y un lado paralelo de longitud y metros. Se quiere que el corral tenga la mayor superficie posible. La tabla muestra algunos casos.

Lado x (m)	20	40	50	70	90
Superficie S (m²)					

a. Expresa y en función de x y escribe la superficie $S(x)$. ¿Cuál es el dominio?
b. Completa la tabla con las superficies para los valores de x indicados.
c. Calcula $S'(x)$ y halla el valor de x que maximiza la superficie.
d. Calcula las dimensiones y la superficie máxima, y comprueba que es un máximo.
e. ¿Cuánto vale la superficie si el corral fuera un cuadrado (con los tres lados iguales)? Compáralo con el máximo.

Ejercicio 16

Ejercicio 16 – La caja de cartulina

Para una actividad de manualidades, un colegio de Cáceres fabrica cajas sin tapa a partir de láminas rectangulares de cartulina de 30 cm por 20 cm. Se recorta un cuadrado de lado x centímetros en cada esquina y se doblan los bordes hacia arriba. Se busca la caja de mayor volumen.

x (cm)	1	2	3	4	5	6
V (cm³)	504	832	1008	1056	1000	864

a. Escribe las dimensiones de la base y la altura en función de x e indica entre qué valores puede variar x.
b. Escribe el volumen $V(x)$ como polinomio.
c. Calcula $V'(x)$ y halla la solución válida de $V'(x) = 0$.
d. Calcula el volumen máximo y las dimensiones de la caja.
e. Calcula el volumen para $x = 3$ y $x = 5$ y comprueba que son menores que el máximo.

Ejercicio 17

Ejercicio 17 – El coste medio de una imprenta

Una imprenta de Pamplona tiene un coste total (en euros) de $C(q) = q^2 + 10q + 400$ para q cientos de folletos. El coste medio por cada cien folletos es .

q (cientos)	5	10	20	30	40
Coste medio (€)					

a. Escribe simplificado como suma de tres términos.
b. Completa la tabla con el coste medio para los valores indicados.
c. Calcula y halla el valor de q que minimiza el coste medio.
d. Calcula el coste medio mínimo y el coste total correspondiente.
e. Comprueba que el coste marginal $C'(q)$ coincide con el coste medio en el mínimo.

Ejercicio 18

Ejercicio 18 – Fijar el precio de unas mochilas

Una empresa de mochilas escolares de Alcoy estima que el precio al que puede vender q unidades al mes es $p(q) = 100 - 0{,}5q$ euros. Fabricar q mochilas le cuesta $C(q) = 20q + 400$ euros. La empresa quiere decidir cuántas mochilas fabricar para maximizar el beneficio.

a. Escribe la función de ingresos $I(q) = q \cdot p(q)$.

b. Escribe la función de beneficio $B(q) = I(q) - C(q)$.
c. Calcula $B'(q)$ y halla la cantidad que da el beneficio máximo.
d. Calcula el beneficio máximo y el precio de venta correspondiente.
e. Calcula el ingreso marginal y el coste marginal en ese punto y compáralos.

Ejercicio 19

Ejercicio 19 – La medicina que se elimina despacio

Un laboratorio de Barcelona estudia un antiinflamatorio. La concentración en sangre (en mg/L) pasadas t horas desde la toma es $c(t) = 10\,t\,e^{-t/2}$. Se mide en varias horas y se quiere saber cuándo la concentración es máxima y si baja de 2 mg/L antes de las 10 horas.

t (h)	0	1	2	4	6	10
c(t) (mg/L)						

a. Completa la tabla de valores con dos decimales.
b. Calcula $c'(t)$ aplicando la regla del producto y la de la cadena.
c. Halla el instante de concentración máxima y el valor máximo.
d. Estudia el crecimiento y decrecimiento de c.
e. Utiliza la tabla para decidir si a las 10 horas la concentración es menor que 2 mg/L.

Ejercicio 20

Ejercicio 20 – Desafío: parámetros y tangentes

Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ con a y b números reales.

a. Halla a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(1, -1)$.
b. Con esos valores, factoriza $f'(x)$ y clasifica los extremos.
c. Escribe la tangente a la gráfica en $x = 2$.
d. ¿Existe algún punto con tangente de pendiente -2? Razona la respuesta.