Soluciones - Derivadas

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. Sustituimos en la fórmula: $f(1) = 1 - 3 = -2$; $f(3) = 9 - 9 = 0$; $f(4) = 16 - 12 = 4$.

b. La TVM es el cociente entre la variación de la función y la de la variable. En $[1, 4]$: $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{4 - (-2)}{3} = 2$. En $[1, 3]$: $\dfrac{0 - (-2)}{2} = 1$.

c. El valor 2 es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(1, -2)$ y $(4, 4)$ de la gráfica: en promedio, la función sube 2 unidades por cada unidad que avanza x.

d. $f(1 + h) = (1 + h)^2 - 3(1 + h) = h^2 - h - 2$. TVM $= \dfrac{h^2 - h - 2 - (-2)}{h} = \dfrac{h^2 - h}{h} = h - 1$. Cuando $h \to 0$ se acerca a -1, que es la derivada $f'(1)$.

Solución del ejercicio 2

a. Formamos el cociente incremental: $\dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \dfrac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \dfrac{6h + h^2}{h} = 6 + h$. Al tender h a 0 el cociente tiende a 6, luego $f'(3) = 6$.

b. Aparece una indeterminación $\frac{0}{0}$; multiplicamos y dividimos por el conjugado $\sqrt{4 + h} + 2$: $\dfrac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} = \dfrac{(4 + h) - 4}{h(\sqrt{4 + h} + 2)} = \dfrac{1}{\sqrt{4 + h} + 2} \to \dfrac{1}{4}$. Por tanto, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

c. $\dfrac{5(a + h) - 2 - (5a - 2)}{h} = \dfrac{5h}{h} = 5$. La derivada vale 5 en todos los puntos, lo que coincide con la pendiente de la recta $y = 5x - 2$.

Solución del ejercicio 3

a. Derivamos término a término con la regla de la potencia $(x^n)' = nx^{n-1}$: $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$. El término constante -7 tiene derivada nula.

b. Primero escribimos las raíces y fracciones como potencias: $g(x) = 4x^{1/2} + x^{-2} - 2x$. Entonces $g'(x) = 2x^{-1/2} - 2x^{-3} - 2 = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^3} - 2$.

c. Del mismo modo, $h(x) = \frac{1}{6}x^3 - 5x^{-1} + 9$, luego $h'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x^{-2} = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{x^2}$.
d. Sustituimos en las derivadas: $f'(1) = 12 - 6 + 5 = 11$ y $g'(4) = \frac{2}{2} - \frac{2}{64} - 2 = 1 - \frac{1}{32} - 2 = -\frac{33}{32}$.

Solución del ejercicio 4

a. Regla del producto $(uv)' = u'v + uv'$ con $u = x^2 + 1$ y $v = 3x - 2$: $f' = 2x(3x - 2) + (x^2 + 1) \cdot 3 = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$.
b. Regla del cociente $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$: $g' = \frac{2(x-3) - (2x+1)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{2x - 6 - 2x - 1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$. Es siempre negativa, así que g decrece en cada intervalo de su dominio.
c. Es más cómodo escribir $h = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$ y aplicar la regla de la potencia: $h' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
d. Desarrollando, $f = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, y derivando término a término, $f' = 9x^2 - 4x + 3$. Coincide con el apartado a).

Solución del ejercicio 5

a. La función exterior es la potencia cuarta y la interior $3x^2 - 1$, cuya derivada es $6x$: $f' = 4(3x^2 - 1)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 - 1)^3$.
b. La derivada de e^u es $e^u \cdot u'$; aquí $u = 2x$ y $u' = 2$: $g' = 2e^{2x}$.
c. La derivada de $\ln u$ es $\frac{u'}{u}$; con $u = x^2 + 1$: $h' = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
d. Combinamos producto y cadena, sabiendo que $(e^{-x})' = -e^{-x}$: $k' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$. Sacar factor común e^{-x} facilita estudiar el signo.

Solución del ejercicio 6

a. Regla de la potencia: $f'(x) = 3x^2 - 3$.
b. Necesitamos el punto y la pendiente: $f(2) = 8 - 6 = 2$ y $f'(2) = 12 - 3 = 9$. La tangente es $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, es decir, $y - 2 = 9(x - 2)$, o sea, $y = 9x - 16$.
c. La tangente es horizontal cuando su pendiente es 0: $3x^2 - 3 = 0$, luego $x^2 = 1$ y $x = 1$ o $x = -1$.
d. En $x = 1$: $f(1) = 1 - 3 = -2$, y la tangente es $y = -2$. En $x = -1$: $f(-1) = -1 + 3 = 2$, y la tangente es $y = 2$. Son rectas horizontales que tocan la curva en un mínimo y en un máximo relativos.

Solución del ejercicio 7

a. $s(0) = 0$ y $s(4) = 32 + 12 = 44$ m. La velocidad media es la TVM de s: $\dfrac{44 - 0}{4} = 11$ m/s.
b. La velocidad instantánea es la derivada: $s'(t) = 4t + 3$. En $t = 4$: $4 \cdot 4 + 3 = 19$ m/s.
c. La velocidad media (11 m/s) promedia todo el intervalo; la instantánea en $t = 4$ (19 m/s) es mayor porque el coche acelera: al final va más rápido que la media.
d. Igualamos la derivada a 15: $4t + 3 = 15$, luego $4t = 12$ y $t = 3$ s. A los 3 segundos el coche circula a 15 m/s.

Solución del ejercicio 8

a. Sustituimos $q = 100$:
$C(100) = 0{,}02 \cdot 10\,000 + 500 + 300 = 200 + 500 + 300 = 1\,000$ €. Producir 100 bicicletas cuesta 1 000 €.
b. El coste marginal es la derivada del coste: $C'(q) = 0{,}04q + 5$, y $C'(100) = 4 + 5 = 9$ € por unidad.
c. $C(101) = 0{,}02 \cdot 10\,201 + 505 + 300 = 204{,}02 + 505 + 300 = 1\,009{,}02$ €. La unidad 101 cuesta $C(101) - C(100) = 9{,}02$ €, prácticamente lo mismo que el coste marginal.
d. El coste marginal indica cuánto cuesta aproximadamente fabricar una unidad más cuando ya se producen 100: unos 9 €.

Solución del ejercicio 9

a. $I(20) = 60 \cdot 20 - \dfrac{1}{2} \cdot 400 = 1\,200 - 200 = 1\,000$ €. Vendiendo 20 pares se ingresan 1 000 € a la semana.
b. Derivamos: $I'(q) = 60 - q$, y $I'(20) = 40$ € por par. Vender un par más aumenta el ingreso en unos 40 €.
c. Resolvemos $60 - q = 0$, de donde $q = 60$ pares.
d. Para $q < 60$ el ingreso marginal es positivo y el ingreso crece; para $q > 60$ es negativo y el ingreso baja. Con $q = 60$ se alcanza el ingreso máximo, $I(60) = 3\,600 - 1\,800 = 1\,800$ €.

Solución del ejercicio 10

a. En 2020, $t = 0$: $P(0) = 1000\,e^{0} = 1000$ habitantes. En 2030, $t = 10$: $P(10) = 1000\,e^{0{,}3} = 1000 \cdot 1{,}3499 \approx 1\,350$ habitantes.
b. TVM $= \dfrac{P(10) - P(0)}{10 - 0} = \dfrac{1350 - 1000}{10} = 35$ habitantes por año, de media.

c. Por la regla de la cadena, $P'(t) = 1000 \cdot 0{,}03\, e^{0{,}03t} = 30\, e^{0{,}03t}$. En 2030: $30 \cdot 1{,}3499 \approx 40{,}5$ habitantes por año, más que la media porque la población crece cada vez más deprisa.
d. $P'(t) = 30\, e^{0{,}03t} = 0{,}03 \cdot 1000\, e^{0{,}03t} = 0{,}03\, P(t)$. El ritmo de crecimiento es proporcional a la población: cada año crece un 3 % de los habitantes que hay.

Solución del ejercicio 11

a. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$. Se anula en $x = 1$ y $x = 3$.
b. En $(-\infty, 1)$ pruebo $x = 0$: $f'(0) = 9 > 0$. En $(1, 3)$ pruebo $x = 2$: $f'(2) = -3 < 0$. En $(3, \infty)$ pruebo $x = 4$: $f'(4) = 9 > 0$.
c. Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y decrece en $(1, 3)$.
d. En $x = 1$ pasa de crecer a decrecer: máximo relativo $(1, 4)$. En $x = 3$ pasa de decrecer a crecer: mínimo relativo $(3, 0)$.

Solución del ejercicio 12

a. $B(10) = -100 + 600 - 500 = 0$ y $B(50) = -2500 + 3000 - 500 = 0$. En ambos casos el beneficio es nulo: son los umbrales de rentabilidad.
b. $B'(q) = -2q + 60$. Resolvemos $-2q + 60 = 0$ y obtenemos $q = 30$.
c. $B' > 0$ si $q < 30$ y $B' < 0$ si $q > 30$: el beneficio crece y luego decrece, así que hay un máximo. $B(30) = -900 + 1800 - 500 = 400$ €, que se obtiene con 3 000 desayunos.
d. Factorizamos $B(q) = -(q-10)(q-50)$, que es positivo entre las raíces: para $10 < q < 50$, es decir, de 1 000 a 5 000 desayunos al mes.

Solución del ejercicio 13

a. Al salir de las manos $x = 0$: $y(0) = 2$ m.
b. $y'(x) = -0{,}2x + 0{,}8$ y $y'(0) = 0{,}8$: el balón sale con una pendiente de 0,8, es decir, sube 0,8 m por cada metro que avanza.
c. Resolvemos $y'(x) = 0$: $-0{,}2x + 0{,}8 = 0$, luego $x = 4$ m. Como y' pasa de positiva a negativa, es un máximo: $y(4) = -1{,}6 + 3{,}2 + 2 = 3{,}6$ m. El balón alcanza 3,6 m a 4 m del lanzamiento.
d. $y(2) = -0{,}4 + 1{,}6 + 2 = 3{,}2$ y $y'(2) = -0{,}4 + 0{,}8 = 0{,}4$. Tangente: $y - 3{,}2 = 0{,}4(x - 2)$, es decir, $y = 0{,}4x + 2{,}4$.

Solución del ejercicio 14

a. $c(1) = \dfrac{20}{1+4} = 4$ mg/L y $c(4) = \dfrac{80}{16+4} = 4$ mg/L. La concentración es la misma

en los dos instantes, así que entre ellos debe alcanzarse un máximo.

b. Regla del cociente: $c'(t) = \dfrac{20(t^2+4) - 20t \cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \dfrac{80 - 20t^2}{(t^2+4)^2}$.

c. Igualamos el numerador a 0: $80 - 20t^2 = 0$, luego $t^2 = 4$ y $t = 2$ h (la solución -2 no tiene sentido). $c(2) = \dfrac{40}{8} = 5$ mg/L es la concentración máxima.

d. El denominador es positivo, así que el signo lo da $80 - 20t^2$: positivo si $t < 2$ y negativo si $t > 2$. La concentración aumenta en $(0, 2)$ y disminuye para $t > 2$.

Solución del ejercicio 15

a. Malla: $2x + y = 200$, luego $y = 200 - 2x$. Superficie $S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$. Dominio: $0 < x < 100$.

b. $S(20) = 20 \cdot 160 = 3\,200$; $S(40) = 40 \cdot 120 = 4\,800$; $S(50) = 50 \cdot 100 = 5\,000$; $S(70) = 70 \cdot 60 = 4\,200$; $S(90) = 90 \cdot 20 = 1\,800$.

c. $S'(x) = 200 - 4x = 0$ implica $x = 50$.

d. Para $x = 50$: $y = 200 - 100 = 100$ m. Superficie: $50 \cdot 100 = 5\,000$ m^2. Es máximo porque $S' > 0$ si $x < 50$ y $S' < 0$ si $x > 50$ (o porque S es una parábola con coeficiente $-2 < 0$).

e. Con tres lados iguales, $3x = 200$, $x = 66{,}67$ m: $S = 66{,}67^2 = 4\,444{,}4$ m^2. Es menor que 5 000 m^2, así que no es lo óptimo.

Solución del ejercicio 16

a. Altura x; base de $(30 - 2x)$ por $(20 - 2x)$ cm. Debe ser $0 < x < 10$.

b. $V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.

c. $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600 = 0$, que simplificada es $3x^2 - 50x + 150 = 0$. Fórmula: $x = \dfrac{50 \pm \sqrt{2500 - 1800}}{6} = \dfrac{50 \pm 26{,}46}{6}$, es decir, $x = 12{,}74$ (fuera del dominio) o $x = 3{,}92$ cm.

d. Con $x = 3{,}92$: base $22{,}15$ por $12{,}15$ cm y altura $3{,}92$ cm. $V = 3{,}92 \cdot 22{,}15 \cdot 12{,}15 = 1056$ cm^3.

e. $V(3) = 3 \cdot 24 \cdot 14 = 1\,008$ cm^3 y $V(5) = 5 \cdot 20 \cdot 10 = 1\,000$ cm^3. Ambos son menores que el máximo (unos 1056 cm^3).

Solución del ejercicio 17

a. .

b. ; ; ; ; .

c. implica $q^2 = 400$, luego $q = 20$ (solo la solución positiva).

d. € por cada cien folletos. Coste total: $C(20) = 400 + 200 + 400 = 1\,000$ €, que es $50 \cdot 20$.

e. $C'(q) = 2q + 10$ y $C'(20) = 50$, igual que . Es una propiedad general: en el mínimo del coste medio, el coste marginal es igual al coste medio.

Solución del ejercicio 18

a. Ingreso = cantidad · precio: $I(q) = q(100 - 0{,}5q) = 100q - 0{,}5q^2$.

b. Restamos el coste: $B(q) = 100q - 0{,}5q^2 - 20q - 400 = -0{,}5q^2 + 80q - 400$.

c. $B'(q) = -q + 80$; resolvemos $-q + 80 = 0$ y obtenemos $q = 80$. Es un máximo porque B es una parábola con coeficiente principal $-0{,}5 < 0$.

d. $B(80) = -3\,200 + 6\,400 - 400 = 2\,800$ €. El precio es $p(80) = 100 - 40 = 60$ € por mochila. La empresa debe fabricar 80 mochilas al mes.

e. $I'(q) = 100 - q$ da $I'(80) = 20$, y $C'(q) = 20$. Coinciden: en el óptimo, el ingreso marginal es igual al coste marginal.

Solución del ejercicio 19

a. $c(0) = 0$; $c(1) = 10e^{-0{,}5} = 6{,}07$; $c(2) = 20e^{-1} = 7{,}36$; $c(4) = 40e^{-2} = 5{,}41$; $c(6) = 60e^{-3} = 2{,}99$; $c(10) = 100e^{-5} = 0{,}67$.

b. $c'(t) = 10e^{-t/2} + 10t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t/2} = 10e^{-t/2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)$.

c. Como $e^{-t/2} > 0$, se anula si $1 - \frac{t}{2} = 0$, es decir, $t = 2$ h. Concentración máxima: $c(2) = 20e^{-1} = 7{,}36$ mg/L.

d. $c' > 0$ si $t < 2$ (crece) y $c' < 0$ si $t > 2$ (decrece).

e. $c(10) = 0{,}67$ mg/L, menor que 2. De hecho ya a las 6 h es $2{,}99$ y a las 8 h es $80e^{-4} = 1{,}47$: baja de 2 mg/L entre las 6 y las 8 horas.

Solución del ejercicio 20

a. Debe cumplirse $f(1) = -1$: $1 + a + b = -1$, es decir, $a + b = -2$. Y $f'(1) = 0$: $3 + 2a + b = 0$, es decir, $2a + b = -3$. Restando: $a = -1$ y $b = -1$. Entonces $f(x) = x^3 - x^2 - x$.

b. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x - 1)(3x + 1)$. Raíces: $x = 1$ y $x = -\frac{1}{3}$. Signo: positiva, negativa, positiva. Máximo relativo en $x = -\frac{1}{3}$ y mínimo relativo en $(1, -1)$.

c. $f(2) = 8 - 4 - 2 = 2$ y $f'(2) = 12 - 4 - 1 = 7$. Tangente: $y - 2 = 7(x - 2)$, es decir, $y = 7x - 12$.

d. Se necesita $3x^2 - 2x - 1 = -2$, es decir, $3x^2 - 2x + 1 = 0$. El discriminante es $4 - 12 = -8 < 0$, así que no tiene solución: ninguna tangente tiene pendiente -2 (el valor mínimo de f' es $-\frac{4}{3}$).