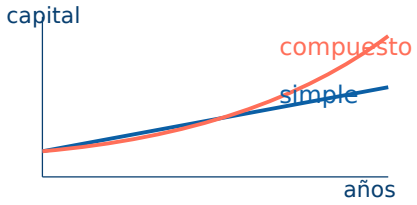
Apuntes - Aritmética mercantil

Curso: 1 Bachillerato Ccss

En economía casi todo se expresa en porcentajes: el IVA, las rebajas, la subida del salario, la inflación o el tipo de interés de un depósito. En este capítulo aprenderás a manejarlos con rapidez y a calcular intereses, préstamos y ahorros.

Actividad de introducción: dos ofertas para el mismo ahorro

Marina ha ganado 5 000 € en un concurso de fotografía y dos bancos le hacen ofertas. El primero le garantiza un 3 % anual y le entrega solo los intereses cada año. El segundo le ofrece también un 3 % anual, pero deja los intereses dentro de la cuenta para que generen más intereses. Al principio la diferencia parece ridícula: 150 € frente a 150 €. Sin embargo, al cabo de veinte años, la primera oferta le ha dado 3 000 € de intereses y la segunda, algo más de 4 000 €. Entender de dónde sale esa diferencia, saber calcular el valor final de un ahorro o la cuota de un préstamo y comparar productos con un indicador común, la TAE, es el objetivo de este tema. Son las herramientas con las que cualquier ciudadano decide si una oferta de una tienda, de un banco o de una aseguradora le conviene.



Porcentajes e índices de variación

Definición: índice de variación

El **índice de variación** i es el número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial C_0 para obtener la final C_f. Un aumento del $r\,\%$ tiene $i = 1 + \dfrac{r}{100}$ y una disminución del $r\,\%$ tiene $i = 1 - \dfrac{r}{100}$.

Regla

$C_f = C_0 \cdot i$ y, al revés, $C_0 = C_f : i$. Cuando se encadenan varias variaciones, **los índices se multiplican**: $i_{total} = i_1 \cdot i_2 \cdots$

Método: variaciones sucesivas

1. Convierte cada porcentaje en su índice de variación.
2. Multiplica todos los índices.

3. Aplica el índice total a la cantidad inicial.
4. Si quieres el porcentaje total, resta 1 al índice total y multiplica por 100.

Ejemplo 1

Una camiseta de 40 € se rebaja un 25 % y después un 10 % adicional. ¿Cuánto cuesta y qué descuento único equivale?

$i = 0{,}75 \cdot 0{,}90 = 0{,}675$. Precio: $40 \cdot 0{,}675 = 27$ €. Descuento total: $1 - 0{,}675 = 0{,}325$, es decir, el 32,5 % y no el 35 %.

¡Atención!

Un aumento del 20 % seguido de una rebaja del 20 % **no** devuelve el precio original: $1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$, una bajada global del 4 %. Los porcentajes sucesivos no se suman.

Interés simple

Definición: interés simple

En el interés simple los intereses de cada periodo se calculan siempre sobre el capital inicial C_0 y no se acumulan. Es típico de operaciones a corto plazo.

Regla

Con tipo anual r (en tanto por uno) y tiempo t en años:

$$I = C_0 \cdot r \cdot t, \qquad C_f = C_0(1 + r\,t).$$

Si el tiempo está en meses se divide entre 12 y, si está en días, entre 365.

Ejemplo 2

Se depositan 3 500 € durante 8 meses al 2,4 % de interés simple anual. Calcula los intereses.

$I = 3500 \cdot 0{,}024 \cdot \dfrac{8}{12} = 56$ €. El capital final es 3 556 €.

Interés compuesto

Definición: interés compuesto

En el interés compuesto los intereses de cada periodo se suman al capital (se *capitalizan*) y producen a su vez nuevos intereses.

Regla

Con capitalización anual: $C_f = C_0(1+r)^t$. Para el tiempo, $t = \dfrac{\log(C_f/C_0)}{\log(1+r)}$. Para el tipo, $r = \sqrt[t]{C_f/C_0} - 1$. Los capitales anuales forman una progresión geométrica de razón $1+r$.

Años	Interés simple (1 000 € al 5 %)	Interés compuesto (1 000 € al 5 %)
0	1 000,00 €	1 000,00 €
5	1 250,00 €	1 276,28 €
10	1 500,00 €	1 628,89 €
20	2 000,00 €	2 653,30 €

Ejemplo 3

¿En qué se convierten 4 000 € al 3,5 % anual compuesto durante 5 años?

$C_f = 4000 \cdot 1{,}035^5 = 4000 \cdot 1{,}187686 = 4\,750{,}74$ €.

Capitalización fraccionada y TAE

Definición: tipo nominal y TAE

El **tipo nominal anual** R con capitalización en k periodos al año ($k=12$ mensual, $k=4$ trimestral) da un tipo por periodo $r_k = R/k$. La **TAE** (tasa anual equivalente) es el tipo realmente obtenido en un año.

Propiedad

$C_f = C_0\left(1+\dfrac{R}{k}\right)^{kt}$ y $\mathrm{TAE} = \left(1+\dfrac{R}{k}\right)^{k} - 1$. Si $k>1$, la TAE es mayor que el nominal. La TAE sirve para comparar productos con distinta capitalización.

Ejemplo 4

Un depósito ofrece el 4 % nominal con abono mensual. ¿Cuál es su TAE?

$\mathrm{TAE} = \left(1+\dfrac{0{,}04}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}04074$: un 4,074 %.

Amortización de préstamos y ahorro periódico

Regla: cuota de un préstamo

Un préstamo C al tipo r por periodo, devuelto con n cuotas constantes a al final de cada periodo, cumple

$$a = \frac{C \cdot r}{1 - (1+r)^{-n}}.$$

Cada cuota contiene intereses (sobre el capital pendiente) y amortización. Al principio pesan más los intereses y, con el tiempo, la amortización.

Regla: ahorro periódico

Si se ingresa una cantidad fija a al final de cada periodo, el capital tras n ingresos es $C_f = a \cdot \dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Ejemplo 5

Préstamo de 6 000 € al 5 % anual con 4 cuotas anuales.

$a = \dfrac{6000 \cdot 0{,}05}{1 - 1{,}05^{-4}} = \dfrac{300}{0{,}177298} = 1\,692{,}07$ €. Se pagan en total 6 768,28 €, es decir, 768,28 € de intereses.

¡Atención!

- Usa el tipo en tanto por uno (0,03), no en tanto por ciento (3), dentro de las fórmulas.
- Pasa los meses a años en el interés simple, y ajusta el exponente cuando dividas el tipo entre el número de periodos.
- Calcula el porcentaje de una rebaja sobre el precio inicial, no sobre el final.

Observación

La cuota de un préstamo es constante, pero no lo es la parte de intereses: baja en cada cuota porque el capital pendiente disminuye. Por eso el total pagado supera siempre al capital prestado.

Ampliación: precios, impuestos e inflación

Método: hallar el valor inicial conociendo el final

1. Escribe el índice de variación que se ha aplicado (por ejemplo $1{,}21$ para un IVA del 21 %).
2. Plantea la ecuación: valor inicial multiplicado por el índice es igual al valor final.

3. Despeja dividiendo el valor final entre el índice.
4. Comprueba multiplicando el resultado por el índice.

Así se calcula el precio sin IVA a partir del precio con IVA: no se resta el 21 % del precio final, se divide entre 1,21.

Ejemplo 6

Un televisor cuesta 726 € con el 21 % de IVA incluido. ¿Cuánto vale sin IVA y cuánto IVA se paga?

El precio sin IVA es $\frac{726}{1{,}21} = 600$ €. El IVA pagado es $726 - 600 = 126$ €. Si hubiéramos restado el 21 % de 726 € habríamos obtenido 573,54 €, un resultado falso. Comprobación: $600 \cdot 1{,}21 = 726$ €.

En España hay tres tipos de IVA: el general del 21 %, el reducido del 10 % (alimentos elaborados, transporte, hostelería) y el superreducido del 4 % (pan, leche, libros). En la factura de una empresa se desglosan la base imponible, el tipo y la cuota. Para un trabajador autónomo o una pequeña empresa es esencial distinguir entre el precio con y sin IVA, porque el impuesto no es un ingreso suyo: lo recauda y lo entrega a Hacienda.

Definición: poder adquisitivo e inflación

La **inflación** es el aumento generalizado y sostenido de los precios, que se mide con el índice de precios de consumo (IPC). El **poder adquisitivo** de un salario es la cantidad de bienes que permite comprar. Si los precios suben con un índice i_p y el salario con un índice i_s, el poder adquisitivo se multiplica por $\frac{i_s}{i_p}$.

Ejemplo 7

En un año los precios suben un 4 % y el sueldo de Rosa, de 1 800 €, sube un 2,5 %. ¿Gana o pierde poder adquisitivo?

El sueldo pasa a $1800 \cdot 1{,}025 = 1845$ €. Los precios multiplican por 1,04, así que, para mantener el poder adquisitivo, haría falta $1800 \cdot 1{,}04 = 1872$ €. El cambio de poder adquisitivo es $\frac{1{,}025}{1{,}04} = 0{,}9856$: pierde un 1,44 %, aunque su sueldo haya subido en euros. Conviene distinguir entre la variación nominal (euros) y la variación real (descontada la inflación).

Ampliación: valor actual y comparación de productos

Regla: valor actual de un capital futuro

Si dentro de t años se quiere disponer de un capital C_f y el dinero rinde un tipo compuesto r anual, hoy hay que invertir

$$C_0 = \frac{C_f}{(1+r)^t}.$$

Es el camino inverso del interés compuesto y sirve para comparar cantidades pagadas en fechas distintas: un euro de hoy vale más que un euro de dentro de un año.

Ejemplo 8

Una academia ofrece pagar un curso de 2 400 € ahora, o 2 520 € dentro de un año. Con el dinero colocado al 3 % anual, ¿qué opción conviene?

El valor actual de 2 520 € es $\frac{2520}{1{,}03} = 2446{,}60$ €. Como 2 446,60 € es mayor que 2 400 €, pagar ahora cuesta menos en valor actual. Conviene pagar al contado (se ahorran unos 46,60 €).

Cuando se comparan productos financieros no basta con mirar el tipo nominal: dos depósitos con el mismo 3 % pueden dar capitales distintos si uno abona los intereses cada mes y el otro cada año. La TAE (tasa anual equivalente) resuelve el problema, porque expresa todos los productos como si capitalizaran una vez al año. En los préstamos, la TAE incluye además comisiones y gastos obligatorios, de manera que refleja el coste real. Una regla útil: para el ahorrador, mejor la TAE más alta; para el que pide dinero, mejor la TAE más baja.

Ejemplo 9

Un préstamo de 1 000 € a un año se devuelve con un pago único de 1 120 € al final. ¿Cuál es su TAE?

El capital pasa de 1 000 € a 1 120 € en un año: $\text{TAE} = \frac{1120}{1000} - 1 = 0{,}12$, es decir, el 12 %. Si se devolviera en 12 cuotas mensuales de 93,33 € (el mismo total de 1 120 €), la TAE sería mucho mayor, cerca del 24 %, porque el dinero prestado va disminuyendo a medida que se devuelve.

Ampliación: un cuadro de amortización

Método: construir un cuadro de amortización

1. Calcula la cuota constante a con la fórmula del préstamo.
2. En cada periodo, calcula los intereses: capital pendiente por el tipo del periodo.
3. La amortización es la cuota menos los intereses.
4. El nuevo capital pendiente es el anterior menos la amortización.
5. Repite hasta que el capital pendiente sea cero (con pequeñas diferencias por el redondeo).

Ejemplo 10

Un préstamo de 3 000 € al 6 % anual con cuotas anuales durante 3 años. Construye el cuadro.

Cuota: $a = \dfrac{3000 \cdot 0{,}06}{1 - 1{,}06^{-3}} = 1122{,}33$ €. Año 1: intereses 180, amortización $942{,}33$, pendiente $2057{,}67$. Año 2: intereses $123{,}46$, amortización $998{,}87$, pendiente $1058{,}80$. Año 3: intereses $63{,}53$, amortización $1058{,}80$, pendiente 0. Se aprecia que los intereses bajan y la amortización sube cada año.

Errores muy comunes en aritmética mercantil

- Sumar porcentajes sucesivos en lugar de multiplicar los índices: un 10 % de subida y un 10 % de bajada no se anulan, dan un índice de $0{,}99$.
- Calcular el precio sin IVA restando el 21 % del precio final.
- Usar la TAE como tipo por periodo dentro de una fórmula de capitalización mensual.
- Comparar productos por el tipo nominal sin mirar cómo se abonan los intereses.
- Olvidar que en el ahorro periódico y en los préstamos el primer pago se hace al final del primer periodo.

¿Sabías que?

El interés compuesto ya se conocía en la antigua Mesopotamia, donde se registraban préstamos de cebada y de plata. Se cuenta que, si se hubiera depositado una moneda de un euro en el año 1 con un interés del 1 % anual compuesto, el capital hoy sería astronómico: unas 560 millones de veces mayor que la moneda inicial. Por eso la ley limita los intereses de demora y por eso las deudas con intereses muy altos, como las tarjetas de crédito aplazadas, pueden crecer tan deprisa.

El consejo de Otto

Antes de calcular, estima. Si el interés compuesto al 5 % dura 15 años, el capital se multiplica por algo más de 2; si tu resultado no cumple eso, revisa el exponente.