Soluciones - Aritmética mercantil

Curso: 1 Bachillerato Ccss

Solución del ejercicio 1

a. La cuota de IVA es el 21 % del precio sin impuestos: $80 \cdot 0{,}21 = 16{,}80$ €. Sumamos la cuota a la base: $80 + 16{,}80 = 96{,}80$ €. El archivador cuesta 96,80 € con IVA.

b. Subir un 21 % equivale a multiplicar por el índice de variación $1 + \dfrac{21}{100} = 1{,}21$. Comprobación: $80 \cdot 1{,}21 = 96{,}80$ €, el mismo precio que antes.

c. Con el IVA reducido el índice es $1{,}10$: $80 \cdot 1{,}10 = 88$ €. Costaría 88 €.

d. Dividimos la cuota entre el precio final: $\dfrac{16{,}80}{96{,}80} = 0{,}1736$. El impuesto representa el $17{,}36\,\%$ del precio final, y no el 21 %, porque el 21 % se calcula sobre el precio sin IVA, que es una cantidad menor.

Solución del ejercicio 2

a. Subida del 8 %: $1{,}08$. Rebaja del 15 %: $1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

b. $250 \cdot 1{,}08 = 270$ € y $270 \cdot 0{,}85 = 229{,}50$ €.

c. Índice total $= 1{,}08 \cdot 0{,}85 = 0{,}918$. Como $0{,}918 - 1 = -0{,}082$, la variación global es una bajada del $8{,}2\,\%$.

d. No: $8 - 15 = -7$ sería sumar los porcentajes, pero las variaciones sucesivas se combinan multiplicando los índices. La bajada real es del 8,2 %.

Solución del ejercicio 3

a. Tras subir: $60 \cdot 1{,}2 = 72$ €. Tras rebajar: $72 \cdot 0{,}8 = 57{,}60$ €.

b. No. Índice global $= 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$, una bajada del 4 %. El precio final es 57,60 €, inferior a 60 €.

c. Hace falta $\dfrac{72 - 60}{72} = 0{,}1667$, es decir, una rebaja del $16{,}67\,\%$ sobre el precio subido, porque el 20 % se aplica a una cantidad mayor.

Solución del ejercicio 4

a. En interés simple los intereses son $I = C_0 \cdot r \cdot t$. Aquí $I = 3000 \cdot 0{,}025 \cdot 4 = 300$ €, y el capital final es $3000 + 300 = 3300$ €.

b. El tiempo debe ir en años: 9 meses son $\dfrac{9}{12} = 0{,}75$ años. Entonces $I = 3000 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}75 = 56{,}25$ €. En 9 meses se generan 56,25 €.

c. Cada año se producen $3000 \cdot 0{,}025 = 75$ €. Planteamos $75t = 600$, de donde $t = \dfrac{600}{75} = 8$. Hacen falta 8 años.
d. $C_f = 3000 + 75t = 3000\,(1 + 0{,}025t)$. Es una función lineal de t: su gráfica es una recta y el capital crece 75 € cada año.

Solución del ejercicio 5

a. En interés compuesto se multiplica cada año por $1{,}03$: $C_f = 5000 \cdot 1{,}03^6 = 5000 \cdot 1{,}194052 = 5970{,}26$ €. Al cabo de 6 años hay 5 970,26 €.
b. Los intereses son la diferencia entre el capital final y el inicial: $5970{,}26 - 5000 = 970{,}26$ €.
c. Con interés simple los intereses serían $5000 \cdot 0{,}03 \cdot 6 = 900$ €. El compuesto da $70{,}26$ € más, porque los intereses de cada año se suman al capital y generan a su vez nuevos intereses.
d. Multiplicamos sucesivamente por 1,03. Año 1: $5000 \cdot 1{,}03 = 5150$ €. Año 2: $5150 \cdot 1{,}03 = 5304{,}50$ €. Año 3: $5304{,}50 \cdot 1{,}03 = 5463{,}64$ €.

Solución del ejercicio 6

a. El tipo nominal se reparte entre los 4 trimestres del año: $\dfrac{4\,\%}{4} = 1\,\%$ cada trimestre, es decir, $r = 0{,}01$.
b. La TAE mide lo que realmente rinde el dinero en un año al capitalizar 4 veces: $\mathrm{TAE} = \left(1 + \dfrac{0{,}04}{4}\right)^4 - 1 = 1{,}01^4 - 1 = 0{,}0406$. La TAE es del $4{,}06\,\%$, algo mayor que el nominal.
c. Aplicamos cuatro veces el índice trimestral: $8000 \cdot 1{,}01^4 = 8000 \cdot 1{,}040604 = 8324{,}83$ €. Tras un año hay 8 324,83 €.
d. Con abono mensual: $\left(1 + \dfrac{0{,}04}{12}\right)^{12} - 1 = 1{,}003333^{12} - 1 = 0{,}0407$, es decir, una TAE del $4{,}07\,\%$. Cuantas más capitalizaciones hay en el año, mayor es la TAE.

Solución del ejercicio 7

a. Rebajar un 20 % es multiplicar por $0{,}8$. Si P es el precio inicial, $P \cdot 0{,}8 = 240$, luego $P = \dfrac{240}{0{,}8} = 300$ €. Antes de la rebaja costaba 300 €.
b. El 10 % adicional se aplica sobre 240 €, así que multiplicamos por $0{,}9$: $240 \cdot 0{,}9 = 216$ €. También $300 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 216$ €. El cliente con tarjeta paga 216 €.

c. Los índices se multiplican: $0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$. Como $1 - 0{,}72 = 0{,}28$, el descuento único es del $28\,\%$, no del 30 %, porque el segundo descuento actúa sobre un precio ya rebajado.

d. Beneficio: $216 - 180 = 36$ €. Sobre el coste supone $\dfrac{36}{180} = 0{,}2$, es decir, un $20\,\%$.

Solución del ejercicio 8

a. $\text{precio} \cdot 1{,}21 = 1089$, luego el precio sin IVA es $\dfrac{1089}{1{,}21} = 900$ €.

b. $1089 - 900 = 189$ €.

c. Descuento: $\dfrac{189}{1089} = 0{,}1736$, un $17{,}36\,\%$.

d. Porque el 21 % se calcula sobre 900 € y no sobre 1 089 €. Para quitar un 21 % de 1 089 € se pagarían 860,31 €, que es menos que el precio sin IVA.

Solución del ejercicio 9

a. Lucía (simple): $2000\,(1 + 0{,}02 \cdot 5) = 2000 \cdot 1{,}1 = 2200$ €. Marta (compuesto): $2000 \cdot 1{,}02^5 = 2000 \cdot 1{,}104081 = 2208{,}16$ €.

b. Restamos los dos capitales: $2208{,}16 - 2200 = 8{,}16$ €. A los 5 años la diferencia es todavía pequeña.

c. A los 20 años, Lucía tiene $2000\,(1 + 0{,}02 \cdot 20) = 2800$ € y Marta tiene $2000 \cdot 1{,}02^{20} = 2000 \cdot 1{,}485947 = 2971{,}89$ €. La diferencia ya es de $171{,}89$ €.

d. El capital de Lucía es una función afín del tiempo (su gráfica es una recta), mientras que el de Marta es una función exponencial, que crece cada vez más deprisa. Por eso la ventaja del compuesto aumenta con los años.

Solución del ejercicio 10

a. El sueldo se multiplica tres veces por $1{,}01$: $1500 \cdot 1{,}01^3 = 1500 \cdot 1{,}030301 = 1545{,}45$ €. Al cabo de tres años cobra 1 545,45 € al mes.

b. El índice acumulado de los precios es el producto de los índices anuales: $1{,}03^3 = 1{,}092727$. Los precios han subido en total un $9{,}27\,\%$, no un 9 %.

c. Para conservar el poder adquisitivo, el sueldo debería subir lo mismo que los precios: $1500 \cdot 1{,}092727 = 1639{,}09$ €.

d. Comparamos los dos índices: $\dfrac{1{,}030301}{1{,}092727} = 0{,}9429$. Con su sueldo compra el 94,29 % de lo que compraba antes, así que ha perdido un $5{,}71\,\%$ de poder adquisitivo.

Solución del ejercicio 11

a. Queremos que el capital final sea el doble del inicial: $C_0 \cdot 1{,}04^t = 2C_0$. Dividimos los dos miembros entre C_0 y queda $1{,}04^t = 2$; el resultado no depende del capital.

b. Tomamos logaritmos: $t \ln 1{,}04 = \ln 2$, luego $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}04} = \dfrac{0{,}693147}{0{,}039221} = 17{,}67$ años.

c. $1{,}04^{17} = 1{,}9479$, que aún no llega a 2, y $1{,}04^{18} = 2{,}0258$, que ya supera 2. Por tanto, el capital se duplica durante el año 18, de acuerdo con el apartado anterior.

d. Con interés simple, $C_0\,(1 + 0{,}04t) = 2C_0$ da $0{,}04t = 1$, es decir, $t = 25$ años. El interés compuesto duplica el capital unos 7 años antes.

Solución del ejercicio 12

a. El tipo nominal se divide entre los 12 meses: $\dfrac{3\,\%}{12} = 0{,}25\,\%$ mensual, es decir, $r = 0{,}0025$.

b. Cada ingreso de 150 € se capitaliza un número distinto de meses; la suma de esa progresión geométrica da $C_f = 150 \cdot \dfrac{1{,}0025^n - 1}{0{,}0025}$.

c. En 15 años hay $n = 15 \cdot 12 = 180$ ingresos. Como $1{,}0025^{180} = 1{,}567432$, resulta $C_f = 150 \cdot \dfrac{1{,}567432 - 1}{0{,}0025} = 34045{,}90$ €.

d. El joven aporta $150 \cdot 180 = 27\,000$ €. Los intereses son la diferencia: $34045{,}90 - 27\,000 = 7045{,}90$ €. Más de una cuarta parte de lo aportado procede de los intereses.

Solución del ejercicio 13

a. El tipo mensual es $r = \dfrac{6\,\%}{12} = 0{,}5\,\% = 0{,}005$ y el número de cuotas es $n = 5 \cdot 12 = 60$.

b. Usamos la fórmula de la cuota de amortización: $a = \dfrac{C \cdot r}{1 - (1+r)^{-n}} = \dfrac{15000 \cdot 0{,}005}{1 - 1{,}005^{-60}} = \dfrac{75}{1 - 0{,}741372} = 289{,}99$ €. La cuota mensual es de unos 290 €.

c. Total pagado: $289{,}99 \cdot 60 = 17399{,}40$ €. Los intereses son lo pagado menos lo prestado: $17399{,}40 - 15\,000 = 2399{,}40$ €.

d. Con $n = 36$: $a = \dfrac{75}{1 - 1{,}005^{-36}} = 456{,}33$ €. Intereses: $456{,}33 \cdot 36 - 15\,000 = 1427{,}88$ €. La cuota es más alta, pero al devolver antes el dinero se pagan casi 1 000 € menos de intereses.

Solución del ejercicio 14

a. Total: $54 \cdot 12 = 648$ €. Recargo: $\dfrac{48}{600} = 8\,\%$ sobre el precio de contado.

b. Con $r = 0{,}01204$: $54 \cdot \dfrac{1-(1+r)^{-12}}{r} = 600{,}00$ €, que coincide con 600 €.

c. $\mathrm{TAE} = (1+r)^{12} - 1 = 0{,}1545$, es decir, aproximadamente el $15{,}4\,\%$. Es un coste mucho mayor que el 8 % aparente, porque se va devolviendo el capital mes a mes.

d. No. Con el dinero en la cuenta, la ganancia anual sería de solo un 2 %, muy inferior al coste del 15,4 % de la financiación. Conviene pagar al contado.

Solución del ejercicio 15

a. $r = \dfrac{2{,}4}{12} = 0{,}2\,\% = 0{,}002$ y $n = 20 \cdot 12 = 240$ cuotas.

b. $a = \dfrac{120000 \cdot 0{,}002}{1 - 1{,}002^{-240}} = \dfrac{240}{1 - 0{,}619080} = 630{,}05$ €.

c. Mes 1: intereses $120000 \cdot 0{,}002 = 240{,}00$ €; amortización $630{,}05 - 240{,}00 = 390{,}05$ €; pendiente $120000 - 390{,}05 = 119609{,}95$ €. Mes 2: intereses $119609{,}95 \cdot 0{,}002 = 239{,}22$ €; amortización $390{,}83$ €; pendiente $119219{,}12$ €. Mes 3: intereses $238{,}44$ €; amortización $391{,}61$ €; pendiente $118827{,}51$ €.

d. Total: $630{,}05 \cdot 240 = 151212{,}00$ €; intereses: $151212{,}00 - 120\,000 = 31212{,}00$ €. En la primera cuota, $\dfrac{240}{630{,}05} = 38{,}1\,\%$ son intereses.

e. Porque los intereses se calculan sobre el capital pendiente, que disminuye cada mes. Como la cuota es fija, lo que baja de intereses se destina a amortizar más capital.

Solución del ejercicio 16

a. A: $\left(1 + \dfrac{0{,}03}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}03042$, es decir, el $3{,}042\,\%$. B: $\left(1 + \dfrac{0{,}031}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}03136$, el $3{,}136\,\%$. C: $3{,}2\,\%$.

b. A: $10000 \cdot (1 + 0{,}03042)^3 = 10940{,}51$ €. B: $10000 \cdot (1 + 0{,}03136)^3 = 10970{,}68$ €. C: $10000 \cdot 1{,}032^3 = 10991{,}05$ €.

c. Mejor C (3,200 %), después B (3,136 %) y por último A (3,042 %). Se comparan con la TAE porque expresa todos los productos con la misma capitalización anual.

d. Con comisión: año 1: $10000 \cdot 1{,}032 - 10 = 10\,310$ €; año 2: $10310 \cdot 1{,}032 - 10 = 10629{,}92$ €; año 3: $10629{,}92 \cdot 1{,}032 - 10 = 10960{,}08$ €. Es menor que A y B (aprox. $10970{,}68$ €), así que dejaría de ser el mejor.

Solución del ejercicio 17

a. Octubre: $120 \cdot 1{,}05 = 126{,}00$ €. Noviembre: $126{,}00 \cdot 0{,}90 = 113{,}40$ €. Diciembre: $113{,}40 \cdot 1{,}08 = 122{,}47$ €. Enero: $122{,}47 \cdot 0{,}85 = 104{,}10$ €.

b. $1{,}05 \cdot 0{,}90 \cdot 1{,}08 \cdot 0{,}85 = 0{,}86751$. Variación global: $-13{,}25\,\%$ (una bajada del $13{,}25\,\%$).

c. Con 3 meses, el precio es 122,47 €. Para volver a 120 € hace falta un índice $\dfrac{120}{122{,}47} = 0{,}9798$, es decir, una rebaja del $2{,}02\,\%$ (y no del 15 %).

d. Índice medio: $\sqrt[4]{0{,}86751} = 0{,}96509$, es decir, una variación media del $-3{,}49\,\%$ mensual. Comprobación: $120 \cdot 0{,}96509^4 = 104{,}10$ €.

Solución del ejercicio 18

a. Tipo mensual: $r = \dfrac{2{,}4\,\%}{12} = 0{,}2\,\% = 0{,}002$. Número de ingresos: $n = 18 \cdot 12 = 216$.

b. Aplicamos la fórmula de capitalización de una renta:
$C = 100 \cdot \dfrac{1{,}002^{216} - 1}{0{,}002} = 100 \cdot \dfrac{1{,}539671 - 1}{0{,}002} = 26983{,}54$ €.

c. El depósito del abuelo se capitaliza 18 años al 2,4 % anual:
$1000 \cdot 1{,}024^{18} = 1532{,}50$ €.

d. Sumamos: $26983{,}54 + 1532{,}50 \approx 28516{,}03$ € (sin redondear los sumandos). Faltan unos 1484 € para 30 000 €, así que no llegan a la cantidad deseada.

e. Despejamos la cuota en la fórmula de la renta: $a = 30000 \cdot \dfrac{0{,}002}{1{,}002^{216} - 1} = 111{,}18$ €. Sin la ayuda del abuelo les bastaría ingresar unos 111 € al mes.

Solución del ejercicio 19

a. 2022: $\dfrac{270}{250} = 1{,}0800$; 2023: $\dfrac{282}{270} = 1{,}0444$; 2024: $\dfrac{310}{282} = 1{,}0993$; 2025: $\dfrac{336}{310} = 1{,}0839$.

b. $\dfrac{336}{250} = 1{,}344$. Han crecido un $34{,}4\,\%$ en cuatro años.

c. $\sqrt[4]{1{,}344} = 1{,}07671$, es decir, un crecimiento medio del $7{,}67\,\%$ anual.

d. 2027 está a dos años de 2025: $336 \cdot 1{,}07671^2 = 389{,}5$ miles de euros, unos 390 000 €.

e. Porque los porcentajes se aplican sobre bases distintas. La media aritmética de los cuatro porcentajes ($7{,}69\,\%$) daría $250 \cdot (1 + 0{,}07690)^4 = 336{,}24$, que no coincide con 336. La media geométrica sí reproduce el valor final.

Solución del ejercicio 20

a. Doce meses al tipo r deben equivaler a un año al 5 %: $(1+r)^{12} = 1{,}05$. Luego $r = 1{,}05^{1/12} - 1 = 0{,}004074$, es decir, un $0{,}4074\,\%$ mensual.

b. El nominal es 12 veces el tipo mensual: $12 \cdot 0{,}4074 = 4{,}889\,\%$. Es algo menor que el 5 % porque los intereses mensuales se capitalizan y generan más intereses.

c. Tipo trimestral $\dfrac{6\,\%}{4} = 1{,}5\,\%$: $\mathrm{TAE} = 1{,}015^4 - 1 = 0{,}06136$, es decir, un $6{,}136\,\%$.

d. Despejamos C_0 en $C_0 \cdot 1{,}035^{10} = 20000$: $C_0 = \dfrac{20000}{1{,}41060} = 14178{,}38$ €. Es el valor actual de los 20 000 € futuros: hay que invertir hoy 14 178,38 €.