Lösungen zur Klassenarbeit - Zahlbereiche, Gleichungen und Ungleichungen

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (3 BE/Punkte)

a) $2x-4=6$ oder $2x-4=-6$: $x=5$ oder $x=-1$ (1 P.).
b) $-6\le 2x-4\le 6 \iff -1\le x\le 5$, $L=[-1,5]$ (2 P.).
Ein Betrag gleich sechs bedeutet, dass der Inhalt sechs oder minus sechs ist; das führt auf zwei lineare Gleichungen. Bei der Ungleichung schreibt man die Doppelungleichung $-6\le 2x-4\le 6$ und formt alle drei Teile gleichzeitig um. Geometrisch liegt x höchstens drei Einheiten von zwei entfernt; die Randpunkte sind genau die Lösungen der Gleichung.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) $x+5=x^2-2x+1$, $x^2-3x-4=0$, $x=4$ oder $x=-1$ (2 P.).
b) $\sqrt{9}=3=4-1$ stimmt; $\sqrt{4}=2\neq -2$. $L=\{4\}$ (2 P.).
Vor dem Quadrieren steht die Bedingung, dass die rechte Seite nicht negativ sein darf, also $x\ge 1$. Das Quadrieren führt auf eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen. Die Probe zeigt, dass $x=-1$ eine Scheinlösung ist, die erst durch das Quadrieren entstanden ist. Ohne Probe gibt es keinen vollen Punktwert.

Lösung zu Aufgabe 3 (5 BE/Punkte)

a) $x\neq -3$; $\frac{2x-1-(x+3)}{x+3}=\frac{x-4}{x+3}\ge 0$ (2 P.).
b) Positiv für x und $x>4$, null bei 4: $L=(-\infty,-3)\cup[4,\infty)$ (3 P.).
Man darf nicht mit dem Nenner multiplizieren, weil sein Vorzeichen unbekannt ist. Stattdessen bringt man alles auf eine Seite und auf den Hauptnenner. In der Vorzeichentabelle trennen die Stellen -3 und 4 drei Bereiche; die Nullstelle des Zählers gehört wegen „größer gleich“ dazu, die Polstelle nie.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $15+0{,}05m$ (2 P.).
b) A: 32 €, B: 25 €; Ersparnis 7 € (2 P.).
Die Kostenfunktionen sind linear in der Minutenzahl; gesucht ist der Bereich, in dem die Gerade von B unterhalb derjenigen von A liegt. Beim Umformen dividiert man durch die positive Zahl $0{,}07$, das Relationszeichen bleibt erhalten. Bei genau hundert Minuten kosten beide Tarife zwanzig Euro.

Lösung zu Aufgabe 5 (4 BE/Punkte)

Annahme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ teilerfremd; $p^2 = 2q^2 \Rightarrow p$ gerade, $p = 2r \Rightarrow q^2 = 2r^2 \Rightarrow q$ gerade; Widerspruch zur Teilerfremdheit (4 P.).
Der Beweis beginnt mit der Annahme eines vollständig gekürzten Bruchs. Aus $p^2 = 2q^2$ folgt, dass p^2 und damit p gerade ist, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade. Einsetzen von $p = 2r$ zeigt, dass auch q gerade ist. Der Widerspruch zur Kürzung beweist die Irrationalität.