Lernzettel - Zahlbereiche, Gleichungen und Ungleichungen

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Passt die Schraube?

In einer Werkstatt wird eine Schraube mit dem Nenndurchmesser 8 mm gefertigt; die Toleranz beträgt $\pm 0{,}05$ mm. Das bedeutet: Für den tatsächlichen Durchmesser d gilt $|d - 8| \leq 0{,}05$. Die Bohrung, in die sie passen soll, hat ebenfalls eine Toleranz. Ob jede Schraube in jedes Loch passt, ist eine Frage nach Ungleichungen mit Beträgen. Solche Abschätzungen sind das tägliche Werkzeug der Analysis: Jeder Grenzwertbeweis besteht aus Ungleichungen, und jede Fehlerrechnung benutzt die Dreiecksungleichung. Deshalb beginnt das Studium mit einer sorgfältigen Wiederholung der Zahlbereiche und des sicheren Umgangs mit Gleichungen und Ungleichungen.

Zahlbereiche

Definition: Zahlbereiche

Die Zahlbereiche bauen aufeinander auf: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. In $\mathbb{Z}$ ist jede Gleichung $x + a = b$ lösbar, in $\mathbb{Q}$ jede Gleichung $ax = b$ mit $a \neq 0$, in $\mathbb{R}$ zusätzlich $x^2 = a$ für $a \geq 0$ und in $\mathbb{C}$ jede Polynomgleichung. Eine reelle Zahl ist **rational**, wenn sie als Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ geschrieben werden kann; das sind genau die abbrechenden oder periodischen Dezimalbrüche, zum Beispiel . Zahlen wie $\sqrt{2}$, π und e sind **irrational**. Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist irrational, und ebenso das Produkt mit einer rationalen Zahl $\neq 0$.

Betrag und Dreiecksungleichung

Definition: Betrag und Dreiecksungleichung

Der **Betrag** $|x|$ misst den Abstand von x zur 0: $|x| = x$ für $x \geq 0$, $|x| = -x$ für x. Es gelten $|ab| = |a||b|$ und $\sqrt{x^2} = |x|$. Wichtig sind die Umformungen $|a|$ und $|a| > c \iff ac$ (für $c > 0$). Die **Dreiecksungleichung** lautet $|a + b| \leq |a| + |b|$, die **umgekehrte** . Sie ist das wichtigste Werkzeug der Analysis, wenn es um Abschätzungen geht.

Gleichungen: Wurzeln und Brüche

Definition: Gleichungen: Wurzeln und Brüche

Wurzelgleichungen löst man, indem man die Wurzel isoliert und quadriert. Quadrieren ist *keine* Äquivalenzumformung (aus $a = b$ folgt $a^2 = b^2$, aber nicht umgekehrt). Deshalb muss man jede erhaltene Lösung durch eine **Probe** in der Ausgangsgleichung prüfen. **Bruchgleichungen**: Zuerst die Definitionsmenge bestimmen (Nenner $\neq 0$), dann mit dem Hauptnenner multiplizieren. Gleichungen mit Beträgen löst man durch **Fallunterscheidung**: Man teilt die Zahlengerade an den Nullstellen der Beträge in Intervalle, löst in jedem Intervall ohne Betragsstriche und prüft, ob die Lösung im Intervall liegt.

Ungleichungen

Definition: Ungleichungen

Ungleichungen löst man wie Gleichungen, mit einer Ausnahme: Multiplikation oder Division mit einer **negativen** Zahl kehrt das Relationszeichen um. Bei Bruchungleichungen wie $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$ multipliziert man nicht mit dem Nenner, sondern betrachtet das Vorzeichen von Zähler und Nenner (Vorzeichentabelle) oder unterscheidet die Fälle $x - 2 > 0$ und $x - 2$. Quadratische Ungleichungen löst man über die Nullstellen und den Verlauf der Parabel: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Das Ergebnis schreibt man als Intervall oder Vereinigung von Intervallen.

Werkzeugkasten: Intervalle, Wurzelgesetze, quadratische Gleichungen

Definition: Werkzeugkasten: Intervalle, Wurzelgesetze, quadratische Gleichungen

Lösungsmengen schreibt man mit **Intervallen**: $[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossen), $(a; b) = \{x \mid a$ (offen), halboffene Intervalle $[a; b)$ und $(a; b]$ sowie unbeschränkte Intervalle wie $[a; \infty)$. Mehrere Lösungsbereiche verbindet man mit $\cup$. Für Wurzeln gelten $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ und $\sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{a/b}$ für $a, b \geq 0$, aber $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Die binomischen Formeln $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ und $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ sind das Standardwerkzeug beim Umformen. Quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ löst man mit der pq-Formel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$; die Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q$ entscheidet über zwei, eine oder keine reelle Lösung.

So gehst du vor: Gleichungen und Ungleichungen mit Betrag oder Wurzel

1. Definitionsmenge bestimmen.
2. Beträge durch Fallunterscheidung an den Nullstellen auflösen.

3. Wurzel isolieren, quadrieren und anschließend die Probe machen.
4. Bei Ungleichungen Vorzeichen von Faktoren beachten (Umdrehen bei negativer Multiplikation).
5. Lösungsmenge als Intervall angeben.

Beispiel 5 (Abschätzung)

Für $|x-1|$ soll ■ abgeschätzt werden. Aus $|x-1|$ folgt 0. Es ist ■. Für $|x-1|$ gilt $x > \frac{1}{2}$ und damit ■. Solche Abschätzungen mit dem Betrag bilden die Grundlage aller Epsilon-Beweise in den folgenden Kapiteln.

Beispiel 1 (Wurzelgleichung)

$\sqrt{x+3} = x-3$. Quadrieren: $x+3 = x^2-6x+9$, also $x^2-7x+6=0$ mit $x_1=1$, $x_2=6$. Probe: $x=6$: $\sqrt{9}=3=6-3$ ✓. $x=1$: $\sqrt{4}=2\neq -2$ ✗. Lösungsmenge $L=\{6\}$.

Beispiel 2 (Betragsungleichung)

$|x-1|$. Beide Seiten sind nichtnegativ, daher darf quadriert werden: x^2-2x+1, also $-6x$ und $x > -\frac{1}{2}$. $L=(-\frac{1}{2};\infty)$.

Beispiel 3 (Bruchungleichung)

$\frac{x-1}{x+3}$. Zähler und Nenner haben dasselbe Vorzeichen: x oder $x>-3$.

Beispiel 4 (Betragsgleichung)

$|x|+|x-2|=4$. Fall x: $-x+2-x=4 \Rightarrow x=-1$ ✓. Fall $0\leq x$: $x+2-x=2\neq 4$, keine Lösung. Fall $x\geq 2$: $2x-2=4\Rightarrow x=3$ ✓. $L=\{-1;3\}$.

Warum man die reellen Zahlen braucht

Die rationalen Zahlen liegen dicht: Zwischen zwei verschiedenen Brüchen liegt immer ein weiterer, etwa ihr Mittelwert. Trotzdem haben sie Lücken. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational, und die Menge $\{q\in\mathbb{Q} : q^2$ hat in $\mathbb{Q}$ keine kleinste obere Schranke. Die reellen Zahlen schließen diese Lücken. Ihr entscheidendes Merkmal ist das **Vollständigkeitsaxiom**: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum, also eine kleinste obere Schranke. Aus diesem Axiom folgen später der Zwischenwertsatz, die Existenz von Wurzeln und die Konvergenz monotoner beschränkter Folgen.

Definition: Supremum und Maximum

Eine Zahl s heißt Supremum der Menge M, wenn s eine obere Schranke von M ist

und keine kleinere Zahl obere Schranke ist. Gehört das Supremum zur Menge, heißt es Maximum. Beispiel: $M = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ hat das Supremum 1, aber kein Maximum, denn $1 - \frac{1}{n}$ für alle n. Das Infimum 0 wird bei $n = 1$ angenommen und ist das Minimum.

Beispiel 6 (Der klassische Irrationalitätsbeweis)

Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Angenommen, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p, q. Dann gilt $p^2 = 2q^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p, etwa $p = 2r$. Einsetzen ergibt $4r^2 = 2q^2$, also $q^2 = 2r^2$, und auch q ist gerade. Dann wären p und q beide durch 2 teilbar, im Widerspruch zur Teilerfremdheit. Also ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Rechnen mit Ungleichungen

Ungleichungen darf man auf beiden Seiten um dieselbe Zahl vermehren und mit positiven Zahlen multiplizieren. Bei Multiplikation mit einer negativen Zahl dreht sich das Relationszeichen um, und beim Kehrwert positiver Zahlen ebenfalls: Aus 0 folgt $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Quadrieren ist nur für nichtnegative Seiten eine Äquivalenzumformung. Wichtige Abschätzungen, die man immer wieder braucht, sind die **Dreiecksungleichung** $|a + b| \leq |a| + |b|$, ihre Umkehrung [redacted] und die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ für $a, b \geq 0$. Letztere folgt aus $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

So gehst du vor: Bruchungleichungen

1. Definitionsmenge bestimmen: Nullstellen des Nenners ausschließen.
2. Alles auf eine Seite bringen und auf einen Hauptnenner: $\frac{Z(x)}{N(x)} \leq 0$ oder ≥ 0. Nicht mit dem Nenner multiplizieren, solange sein Vorzeichen unbekannt ist.
3. Nullstellen von Zähler und Nenner auf der Zahlengeraden markieren.
4. In jedem Teilintervall das Vorzeichen bestimmen (Vorzeichentabelle).
5. Die passenden Intervalle zusammenfassen; Nullstellen des Zählers gehören bei $\leq$ oder $\geq$ dazu, die des Nenners nie.

Beispiel 7 (Vorzeichentabelle)

Lösen Sie $\frac{x+1}{x-2} \leq 2$.

Es ist $x \neq 2$. Umformen: $\frac{x+1-2(x-2)}{x-2} = \frac{5-x}{x-2} \leq 0$. Der Zähler wechselt bei 5, der Nenner bei 2 das Vorzeichen. Für x ist der Bruch negativ, für 2 positiv, für $x > 5$ negativ, bei $x = 5$ null. Lösung: $L = (-\infty, 2) \cup [5, \infty)$. Hätte man einfach mit $x - 2$ multipliziert, wäre der Teil x verloren gegangen.

Quadratische Ungleichungen und Gleichungen mit mehreren Beträgen

Eine quadratische Ungleichung wie $x^2 - 5x + 6 > 0$ löst man über die Nullstellen der Parabel: Hier sind es 2 und 3, und da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist sie außerhalb des Intervalls zwischen den Nullstellen positiv. Die Lösung ist x oder $x > 3$. Hat die Parabel keine Nullstellen, ist sie überall positiv oder überall negativ. Kommen mehrere Beträge vor, teilt man die Zahlengerade an allen Stellen, an denen ein Betragsinhalt null wird. In jedem Teilbereich lassen sich die Beträge ohne Betragsstriche schreiben, und man löst eine gewöhnliche Gleichung. Am Schluss prüft man, ob die gefundenen Lösungen im jeweiligen Bereich liegen.

Beispiel 8 (Zwei Beträge)

Lösen Sie $|x - 1| + |x + 2| = 5$.

Kritische Stellen sind 1 und -2. Für $x \geq 1$: $x - 1 + x + 2 = 5$, also $x = 2$ (liegt im Bereich). Für $-2 \leq x$: $1 - x + x + 2 = 3 \neq 5$, keine Lösung. Für x: $1 - x - x - 2 = 5$, also $x = -3$. $L = \{-3, 2\}$. Geometrisch: Gesucht sind die Punkte, deren Abstände zu 1 und zu -2 zusammen 5 ergeben.

Achtung: Typische Fehler

Quadrieren kann Scheinlösungen erzeugen: Aus $\sqrt{x + 7} = x + 1$ folgt nach Quadrieren auch $x = -3$, das die Ausgangsgleichung nicht erfüllt. Deshalb gehört bei Wurzelgleichungen die Probe zur Lösung. Bei Ungleichungen mit Variablen im Nenner darf man nicht einfach mit dem Nenner multiplizieren. $\sqrt{x^2}$ ist $|x|$, nicht x. Und aus a folgt nicht a^2, wie -3 zeigt.

Wusstest du? Ein Geheimnis der Pythagoreer

Die Pythagoreer glaubten, alles lasse sich durch Verhältnisse ganzer Zahlen ausdrücken. Der Legende nach entdeckte Hippasos von Metapont im 5. Jahrhundert v. Chr., dass die Diagonale eines Quadrats nicht in einem ganzzahligen Verhältnis zur Seite steht – und soll dafür im Meer ertränkt worden sein. Eine strenge Konstruktion der reellen Zahlen gelang erst 1872 Richard Dedekind in Braunschweig und Georg Cantor in Halle.

Hinweis: Lösungsmengen sauber angeben

Geben Sie Lösungen von Ungleichungen als Intervalle oder Vereinigungen von Intervallen an und achten Sie auf offene und geschlossene Klammern. Notieren Sie bei jeder Gleichung zuerst die Definitionsmenge. Bei Fallunterscheidungen schreiben Sie zu jedem Fall den Bereich dazu und schneiden die Teillösung damit, bevor Sie alles vereinigen.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Zahlbereiche $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; $\sqrt{2}$ ist irrational; Dezimalzahlen sind genau dann rational, wenn sie abbrechen oder periodisch sind.
- Vollständigkeit: Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum; $\mathbb{Q}$ hat diese Eigenschaft nicht.
- Betrag: $|x-a|$; Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$; $|x-a|$ ist der Abstand von x zu a.
- Wurzelgleichungen: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung, deshalb immer Probe; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Bruchgleichungen und -ungleichungen: Definitionsmenge zuerst; bei Ungleichungen auf die Form $\frac{Z}{N} \lessgtr 0$ bringen und Vorzeichentabelle benutzen.
- Multiplikation mit negativen Zahlen und Kehrwertbildung positiver Zahlen drehen das Relationszeichen um.
- Mehrere Beträge: Zahlengerade an den Nullstellen der Betragsinhalte teilen und jeden Bereich getrennt lösen; AM-GM: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Achtung

Typische Fehler sind das Vergessen der Probe bei Wurzelgleichungen, das Multiplizieren einer Ungleichung mit einem Term unbekannten Vorzeichens und das Kürzen eines Faktors, der null sein kann (es gehen Lösungen verloren). Auch $\sqrt{x^2} = x$ ist falsch, richtig ist $|x|$.

Ottos Tipp

Schreiben Sie zu jeder Aufgabe zuerst die Definitionsmenge auf und kontrollieren Sie am Ende jede Lösung an der Ausgangsgleichung. Bei Beträgen hilft eine Skizze der Zahlengeraden mit den Fallgrenzen.