Arbeitsblatt - Zahlbereiche, Gleichungen und Ungleichungen

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Zahlen einordnen

Ordnen Sie jede Zahl dem kleinsten Zahlbereich $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu, in dem sie liegt, und begründen Sie kurz.

a) -3, $\sqrt{16}$, $0{,}25$

b) $0{,}\overline{3}$, $\sqrt{2}$, π

c) i, $\sqrt{-4}$, $\frac{22}{7}$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Irrationale Zahlen

Führen Sie die Beweise durch Widerspruch.

a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist. Benutzen Sie: Ist p^2 durch 3 teilbar, so auch p.

b) Zeigen Sie: Ist r rational und s irrational, so ist $r + s$ irrational.

c) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrational ist. Quadrieren Sie dazu.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Betragsgleichungen

Lösen Sie die Gleichungen durch Fallunterscheidung und machen Sie die Probe.

a) $|x - 3| = 5$

b) $|2x + 1| = |x - 4|$

c) $|x| = x - 2$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Betragsungleichungen

Lösen Sie und geben Sie die Lösung als Intervall an. Deuten Sie jeweils mit Abständen auf der Zahlengeraden.

a) $|x - 2|$

b) $|2x + 1| \geq 5$

c) $|x + 1| \leq 0$

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Wurzelgleichungen

Lösen Sie die Gleichungen. Prüfen Sie jede gefundene Zahl in der Ausgangsgleichung.

a) $\sqrt{x+7} = x+1$
b) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$
c) Erklären Sie, warum beim Quadrieren Scheinlösungen entstehen können.

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Bruchgleichungen

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie.

a) $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{x^2-1}$
b) $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} = 1$
c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Schraube und Bohrung

Eine Schraube hat den Durchmesser d mit $|d-8| \le 0{,}05$ (in mm), die Bohrung den Durchmesser ℓ mit $|\ell - 8{,}1| \le 0{,}03$. Das Spiel ist $s = \ell - d$.

a) Geben Sie die möglichen Werte von d und ℓ als Intervalle an.
b) Bestimmen Sie das kleinste und das größte mögliche Spiel.
c) Zeigen Sie mit der Dreiecksungleichung $|s - 0{,}1| \le 0{,}08$.
d) Passt jede Schraube in jede Bohrung?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Zwei Handytarife

Tarif A kostet 5 € Grundgebühr und $0{,}09$ € pro Minute, Tarif B 9 € Grundgebühr und $0{,}04$ € pro Minute. Sei m die Zahl der Gesprächsminuten pro Monat.

a) Stellen Sie die Kosten $K_A(m)$ und $K_B(m)$ auf.
b) Für welche m ist Tarif A günstiger? Lösen Sie die Ungleichung.
c) Wie teuer sind beide Tarife bei 80 Minuten?
d) Eine Studentin telefoniert zwischen 60 und 120 Minuten im Monat. Welcher Tarif ist im ungünstigsten Fall teurer, und um wie viel?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Der Anhalteweg

In der Fahrschule lernt man die Faustformel für den Anhalteweg (in m) bei der

Geschwindigkeit v (in km/h): Reaktionsweg $3 \cdot \frac{v}{10}$ plus Bremsweg $\left(\frac{v}{10}\right)^2$.

a) Stellen Sie den Anhalteweg $s(v)$ auf und berechnen Sie ihn für 30 und 50 km/h.
b) Vor einem Kindergarten soll der Anhalteweg höchstens 40 m betragen. Stellen Sie die Ungleichung auf.
c) Lösen Sie die quadratische Ungleichung.
d) Um wie viel Prozent wächst der Bremsweg, wenn man 60 statt 50 km/h fährt?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Ein Beet mit festem Umfang

Ein rechteckiges Gemüsebeet soll mit 20 m Einfassung umrandet werden. Die eine Seite ist x m lang.

a) Drücken Sie die zweite Seite und die Fläche $A(x)$ durch x aus.
b) Für welche x ist die Fläche mindestens $21\,\mathrm{m}^2$?
c) Zeigen Sie mit der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel, dass die Fläche höchstens $25\,\mathrm{m}^2$ ist.
d) Für welche Form wird die größte Fläche erreicht?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Zaun für eine Weide

Ein Landwirt will eine rechteckige Weide mit genau 36 Ar ($3600\,\mathrm{m}^2$) einzäunen und dabei möglichst wenig Zaun verbrauchen. Die Seiten seien a und b.

a) Zeigen Sie mit $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, dass der Umfang mindestens 240 m beträgt.
b) Wann wird der kleinste Umfang erreicht?
c) Wie viel Zaun braucht ein Rechteck mit 40 m mal 90 m?
d) Beweisen Sie die Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ für $a, b \geq 0$.

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Entfernungen auf der Wanderkarte

Auf einer Wanderkarte sind drei Hütten A, B, C eingezeichnet. Von A nach B sind es 5 km Luftlinie, von B nach C 3 km.

a) Schätzen Sie die Luftlinie von A nach C mit der Dreiecksungleichung nach oben ab.
b) Schätzen Sie sie mit der umgekehrten Dreiecksungleichung nach unten ab.
c) Wann werden die Grenzen erreicht?
d) Auf der Zahlengeraden ist $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$. Zeigen Sie dies mit der Dreiecksungleichung $|u+v| \leq |u| + |v|$.

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Quadratische Ungleichungen

Lösen Sie die Ungleichungen über die Nullstellen der zugehörigen Parabel und geben Sie die Lösung als Intervall an.

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$
b) $x^2 + 2x + 5 > 0$
c) $-x^2 + 4x \geq 3$
d) $x^2 \leq 2x$

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Bruchungleichungen

Lösen Sie mit einer Vorzeichentabelle.

a) $\frac{x+1}{x-2} \leq 2$
b) $\frac{1}{x} > x$
c) $\frac{x^2-1}{x+3} \geq 0$

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Zwei Beträge

Gegeben ist $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$.

a) Schreiben Sie f abschnittsweise ohne Beträge.
b) Lösen Sie $f(x) = 5$.
c) Lösen Sie $f(x) \leq 5$.
d) Welchen kleinsten Wert nimmt f an? Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.
e) Für welche c hat $f(x) = c$ genau zwei Lösungen?

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Supremum und Infimum

Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum, sofern sie existieren.

a) $M_1 = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
b) $M_2 = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
c) $M_3 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ und von $\mathbb{R}$
d) Warum ist das Vollständigkeitsaxiom für die Analysis unverzichtbar?

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Mittelwerte vergleichen

Für positive Zahlen a, b betrachtet man das arithmetische Mittel $A = \frac{a+b}{2}$, das geometrische $G = \sqrt{ab}$ und das harmonische $H = \frac{2ab}{a+b}$.

a) Berechnen Sie A, G, H für $a = 4$, $b = 9$.

b) Zeigen Sie $a + \frac{1}{a} \geq 2$ für $a > 0$.
c) Zeigen Sie $H \leq G$. Hinweis: $H = \frac{G^2}{A}$.
d) Ein Auto fährt eine Strecke hin mit 40 km/h und zurück mit 60 km/h. Welches Mittel gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit an?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Dicht, aber lückenhaft

Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$; die irrationalen auch.

a) Zeigen Sie: Zwischen zwei rationalen Zahlen a liegt eine weitere rationale Zahl.
b) Zeigen Sie, dass $a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ irrational ist und zwischen a und b liegt.
c) Geben Sie eine irrationale Zahl zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ an.
d) Folgern Sie, dass jedes Intervall unendlich viele rationale und unendlich viele irrationale Zahlen enthält.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Die Leiter an der Wand

Eine 5 m lange Leiter lehnt an einer senkrechten Wand. Ihr Fußpunkt steht x m von der Wand entfernt, ihr oberes Ende liegt 1 m höher, als der Fuß von der Wand entfernt ist.

a) Stellen Sie eine Wurzelgleichung für x auf.
b) Lösen Sie sie und machen Sie die Probe.
c) Aus Sicherheitsgründen soll der Anstellwinkel zwischen 65° und 75° liegen. Geben Sie die zulässigen Abstände x als Ungleichung an und prüfen Sie Ihre Lösung.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für reelle Zahlen a, b, c, d gilt $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

a) Beweisen Sie die Ungleichung, indem Sie die Differenz der beiden Seiten als Quadrat schreiben.
b) Wann gilt Gleichheit?
c) Bestimmen Sie den größten Wert von $3x + 4y$ unter der Bedingung $x^2 + y^2 = 1$.
d) Deuten Sie die Ungleichung mit dem Skalarprodukt der Vektoren (a, b) und (c, d).