Lösungen - Zahlbereiche, Gleichungen und Ungleichungen

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) $-3 \in \mathbb{Z}$ (negative ganze Zahl, nicht natürlich). $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$: Man muss eine Wurzel erst ausrechnen, bevor man sie einordnet. $0{,}25 = \frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, eine abbrechende Dezimalzahl.
b) $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, denn periodische Dezimalzahlen sind rational. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Beweis durch Widerspruch). $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; ihre Irrationalität bewies Lambert 1761.
c) $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $i^2 = -1$. $\sqrt{-4}$ meint die Lösungen von $z^2 = -4$, also $\pm 2i \in \mathbb{C}$. $\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$ ist nur eine Näherung für π, keine Gleichheit.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Angenommen $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ teilerfremd. Dann $p^2 = 3q^2$, also $3 \mid p$, $p = 3r$. Einsetzen: $9r^2 = 3q^2$, $q^2 = 3r^2$, also $3 \mid q$. Beide durch 3 teilbar – Widerspruch zur Teilerfremdheit.
b) Wäre $r + s = t \in \mathbb{Q}$, so wäre $s = t - r$ als Differenz rationaler Zahlen rational. Das widerspricht der Voraussetzung. $\square$
c) Wäre $\sqrt{2} + \sqrt{3} = t \in \mathbb{Q}$, so $t^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ und $\sqrt{6} = \frac{t^2 - 5}{2} \in \mathbb{Q}$. Wie bei $\sqrt{2}$ zeigt man aber, dass $\sqrt{6}$ irrational ist (aus $p^2 = 6q^2$ folgt $2 \mid p$ und dann $2 \mid q$). Widerspruch.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Abstand von x zu 3 ist 5: $x = 8$ oder $x = -2$. Rechnerisch: $x - 3 = 5$ oder $x - 3 = -5$. Probe: $|5| = |-5| = 5$.
b) Zwei Beträge sind gleich, wenn die Inhalte gleich oder entgegengesetzt sind. $2x + 1 = x - 4$ ergibt $x = -5$; $2x + 1 = -(x - 4)$ ergibt $3x = 3$, $x = 1$. Probe: $|-9| = |-9|$, $|3| = |-3|$. $L = \{-5, 1\}$.
c) Fall $x \geq 0$: $x = x - 2$ ist unmöglich. Fall x: $-x = x - 2$, also $x = 1$, das liegt aber nicht im Bereich x. Also $L = \emptyset$. Anschaulich: Die rechte Seite ist stets kleiner als $|x|$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Die Zahlen mit Abstand weniger als 3 von 2: -1, also $L = (-1, 5)$. Rechnerisch: -3, dann 2 addieren.
b) $2x + 1 \geq 5$ oder $2x + 1 \leq -5$, also $x \geq 2$ oder $x \leq -3$. $L = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$: Der Abstand von x zu $-\frac{1}{2}$ ist mindestens $\frac{5}{2}$.
c) Ein Betrag ist nie negativ, also muss $|x + 1| = 0$ sein: $L = \{-1\}$. Auch eine Ungleichung kann eine einzige Lösung haben.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Quadrieren: $x+7=x^2+2x+1$, also $x^2+x-6=0$, $x=2$ oder $x=-3$. Probe: $\sqrt{9}=3=2+1$ stimmt; $\sqrt{4}=2\neq -2$ stimmt nicht. $L=\{2\}$.
b) Isolieren: $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1}$. Quadrieren: $2x+3=x+2+2\sqrt{x+1}$, also $x+1=2\sqrt{x+1}$. Nochmals quadrieren: $(x+1)^2=4(x+1)$, also $x=-1$ oder $x=3$. Probe: $1-0=1$ und $3-2=1$. $L=\{-1,3\}$.
c) Aus $a=b$ folgt $a^2=b^2$, aber nicht umgekehrt: Auch $a=-b$ führt auf $a^2=b^2$. Die Lösung der quadrierten Gleichung kann deshalb zu $\sqrt{\dots}=-(\dots)$ gehören.

Lösung zu Aufgabe 6

a) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Mit dem Hauptnenner x^2-1: $2(x+1)+(x-1)=3$, also $3x+1=3$, $x=\frac{2}{3}\in D$. Probe: $-6+\frac{3}{5}=-\frac{27}{5}$ und $\frac{3}{-5/9}=-\frac{27}{5}$.
b) $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Links steht $\frac{x-2}{x-2}=1$ für alle $x\in D$. Die Gleichung ist für jedes $x\neq 2$ erfüllt: $L=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
c) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Multiplikation mit $6x(x+1)$: $6(x+1)+6x=5x(x+1)$, also $5x^2-7x-6=0$, $x=2$ oder $x=-\frac{3}{5}$. Beide liegen in D; Probe für 2: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) $d\in[7{,}95;\,8{,}05]$ und $\ell\in[8{,}07;\,8{,}13]$. Ein Betrag $|y-a|\le c$ beschreibt das Intervall $[a-c,a+c]$.
b) Kleinstes Spiel: kleinste Bohrung, dickste Schraube: $8{,}07-8{,}05=0{,}02$ mm. Größtes Spiel: $8{,}13-7{,}95=0{,}18$ mm.
c) $s-0{,}1=(\ell-8{,}1)-(d-8)$, also $|s-0{,}1|\le|\ell-8{,}1|+|d-8|\le 0{,}03+0{,}05=0{,}08$. Die Toleranzen addieren sich.
d) Ja, denn das Spiel ist immer mindestens $0{,}02$ mm und damit positiv. Wären die Toleranzen größer, könnte das Spiel negativ werden und manche Paare würden klemmen.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $K_A(m)=5+0{,}09m$ und $K_B(m)=9+0{,}04m$, jeweils in Euro.
b) $5+0{,}09m$. Bis unter 80 Minuten ist Tarif A günstiger, darüber Tarif B. Die Division durch die positive Zahl $0{,}05$ ändert das Zeichen nicht.
c) $K_A(80)=5+7{,}20=12{,}20$ € und $K_B(80)=9+3{,}20=12{,}20$ €: Gleichstand.
d) Bei 120 Minuten kostet A $15{,}80$ € und B $13{,}80$ €; bei 60 Minuten kostet A $10{,}40$ € und B $11{,}40$ €. Mit A riskiert sie also höchstens 2 € Mehrkosten, mit B höchstens 1 €; B ist die sicherere Wahl.

Lösung zu Aufgabe 9

a) $s(v)=0{,}3v+\frac{v^2}{100}$. $s(30)=9+9=18$ m und $s(50)=15+25=40$ m.
b) $0{,}3v+\frac{v^2}{100}\le 40$, nach Multiplikation mit 100: $v^2+30v-4000\le 0$.

c) Nullstellen: $v = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 16\,000}}{2} = \frac{-30 \pm 130}{2}$, also 50 und -80. Die Parabel ist nach oben geöffnet und zwischen den Nullstellen negativ. Mit $v \geq 0$ folgt $0 \leq v \leq 50$ km/h.
d) Bremsweg 36 m statt 25 m, also $\frac{36}{25} = 1{,}44$: $44\,\%$ mehr. Der Bremsweg wächst quadratisch mit der Geschwindigkeit.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Halber Umfang 10, also zweite Seite $10 - x$ und $A(x) = x(10 - x)$ mit 0.
b) $x(10 - x) \geq 21 \iff x^2 - 10x + 21 \leq 0 \iff (x - 3)(x - 7) \leq 0 \iff 3 \leq x \leq 7$.
c) $\sqrt{x(10 - x)} \leq \frac{x + (10 - x)}{2} = 5$, also $A(x) \leq 25$. Gleichheit gilt genau bei gleichen Seiten.
d) Bei $x = 10 - x$, also $x = 5$: ein Quadrat mit 5 m Seitenlänge und $25\,\mathrm{m}^2$ Fläche.

Lösung zu Aufgabe 11

a) $U = 2(a + b) \geq 4\sqrt{ab} = 4\sqrt{3600} = 4 \cdot 60 = 240$ m. Die Abschätzung gilt für jedes Rechteck mit dieser Fläche.
b) Gleichheit in der Mittelungleichung gilt genau für $a = b$, also für das Quadrat mit 60 m Seitenlänge.
c) $2(40 + 90) = 260$ m, also 20 m mehr als beim Quadrat, obwohl die Fläche dieselbe ist.
d) $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$. Umstellen und durch 2 teilen liefert $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Gleichheit genau bei $\sqrt{a} = \sqrt{b}$. $\square$

Lösung zu Aufgabe 12

a) km: Ein Umweg über B ist nie kürzer als der direkte Weg.
b) km.
c) Die obere Grenze, wenn B auf der Strecke zwischen A und C liegt; die untere, wenn C auf der Strecke von A nach B liegt. Dazwischen ist jede Entfernung möglich.
d) Setze $u = a - b$ und $v = b - c$. Dann ist $u + v = a - c$, und die Dreiecksungleichung liefert $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$. $\square$

Lösung zu Aufgabe 13

a) Nullstellen 2 und 3; die Parabel ist nach oben geöffnet und außerhalb von $[2, 3]$ positiv. $L = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.
b) Die Diskriminante $4 - 20$: keine Nullstellen. Mit quadratischer Ergänzung $(x + 1)^2 + 4 > 0$ für alle x. $L = \mathbb{R}$.
c) $x^2 - 4x + 3 \leq 0 \iff (x - 1)(x - 3) \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 3$. Beachten Sie die Umkehrung des Zeichens beim Multiplizieren mit -1. $L = [1, 3]$.
d) $x^2 - 2x \leq 0 \iff x(x - 2) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 2$. Teilen durch x wäre falsch, weil x negativ oder null sein kann. $L = [0, 2]$.

Lösung zu Aufgabe 14

a) $x \neq 2$. $\frac{x+1-2(x-2)}{x-2} = \frac{5-x}{x-2} \leq 0$. Vorzeichen: negativ für x, positiv auf $(2,5)$, null bei 5, negativ für $x > 5$. $L = (-\infty, 2) \cup [5, \infty)$.
b) $x \neq 0$. $\frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} > 0$. Zähler positiv auf $(-1,1)$, Nenner positiv für $x > 0$. Der Bruch ist positiv für x und für 0. $L = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
c) $x \neq -3$. Kritische Stellen $-3, -1, 1$. Vorzeichen von links nach rechts: $-, +, -, +$. Mit den Nullstellen des Zählers: $L = (-3, -1] \cup [1, \infty)$.

Lösung zu Aufgabe 15

a) $f(x) = -2x - 1$ für x; $f(x) = 3$ für $-2 \leq x$; $f(x) = 2x + 1$ für $x \geq 1$.
b) $-2x - 1 = 5$ ergibt $x = -3$; $3 = 5$ ist unmöglich; $2x + 1 = 5$ ergibt $x = 2 \geq 1$.
$L = \{-3, 2\}$.
c) Im mittleren Bereich ist $f = 3 \leq 5$. Links $-2x - 1 \leq 5 \iff x \geq -3$, rechts $2x + 1 \leq 5 \iff x \leq 2$. $L = [-3, 2]$.
d) Der kleinste Wert ist 3, angenommen auf $[-2, 1]$. $f(x)$ ist die Summe der Abstände zu 1 und -2; zwischen den Punkten ist sie gleich ihrem Abstand 3.
e) Für jedes $c > 3$ gibt es genau zwei Lösungen, je eine links und rechts. Bei $c = 3$ ist es ein ganzes Intervall, bei c keine.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Die Elemente $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$ wachsen gegen 1. Supremum 1, kein Maximum; Infimum 0 = Minimum (bei $n = 1$).
b) Elemente $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Maximum $\frac{1}{2}$ (bei $n = 2$), Minimum -1 (bei $n = 1$); beide sind zugleich Supremum und Infimum.
c) In $\mathbb{R}$ ist $\sup M_3 = \sqrt{2}$, das nicht dazugehört. In $\mathbb{Q}$ gibt es kein Supremum: Zu jeder rationalen oberen Schranke gibt es eine kleinere, weil $\sqrt{2}$ fehlt.
d) Ohne Vollständigkeit hätten monotone beschränkte Folgen keinen Grenzwert, $x^2 = 2$ keine Lösung und der Zwischenwertsatz wäre falsch. Genau diese Lücken hat $\mathbb{Q}$.

Lösung zu Aufgabe 17

a) $A = 6{,}5$, $G = \sqrt{36} = 6$, $H = \frac{72}{13} \approx 5{,}54$. Es gilt $H \leq G \leq A$.
b) Mit $b = \frac{1}{a}$ in $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$: $\frac{a+1/a}{2} \geq 1$. Gleichheit genau für $a = 1$.
c) $H = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)/2} = \frac{G^2}{A}$. Wegen $A \geq G$ folgt $H = G \cdot \frac{G}{A} \leq G$.
d) Gesamtstrecke $2s$, Gesamtzeit $\frac{s}{40} + \frac{s}{60}$. Durchschnitt $\frac{2s}{s/40+s/60} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{100} = 48$ km/h: das harmonische Mittel, nicht 50.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Der Mittelwert $\frac{a+b}{2}$ ist rational und erfüllt a.

b) Wäre die Zahl rational, so auch $\frac{b-a}{\sqrt{2}}$ und damit $\sqrt{2} = \frac{b-a}{\text{rational}}$ – Widerspruch. Wegen 0 liegt sie zwischen a und b.
c) $\frac{1}{3} + \frac{1/6}{\sqrt{2}} \approx 0{,}4512$ liegt zwischen $0{,}3333$ und $0{,}5$.
d) Wendet man a) und b) immer wieder auf das linke Teilintervall an, erhält man beliebig viele verschiedene Zahlen beider Arten.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Nach Pythagoras ist die Höhe $\sqrt{25 - x^2}$. Bedingung: $\sqrt{25 - x^2} = x + 1$.
b) Quadrieren: $25 - x^2 = x^2 + 2x + 1$, also $x^2 + x - 12 = 0$, $x = 3$ oder $x = -4$. Probe: $\sqrt{16} = 4 = 3 + 1$ stimmt; $x = -4$ ist als Abstand sinnlos und erfüllt die Gleichung auch nicht ($3 \neq -3$). Der Fuß steht 3 m entfernt, oben 4 m hoch.
c) $x = 5\cos\alpha$: $5\cos 75^\circ \leq x \leq 5\cos 65^\circ$, also etwa $1{,}29 \leq x \leq 2{,}11$ m. Der Wert $x = 3$ ist zu groß: Die Leiter steht zu flach ($\cos\alpha = 0{,}6$, $\alpha \approx 53{,}1^\circ$).

Lösung zu Aufgabe 20

a) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2 \geq 0$. $\square$
b) Genau für $ad = bc$, also wenn (a, b) und (c, d) parallel sind.
c) $(3x + 4y)^2 \leq (9 + 16)(x^2 + y^2) = 25$, also $3x + 4y \leq 5$. Gleichheit bei (x, y) parallel zu $(3, 4)$: $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, dann $\frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$.
d) Die Ungleichung lautet $|u \cdot v| \leq |u|\,|v|$. Wegen $u \cdot v = |u||v|\cos\varphi$ ist sie gleichbedeutend mit $|\cos\varphi| \leq 1$.