Klassenarbeit - Vektorräume, Basis und Dimension

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Name:	Datum:	**Note:** /20

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Punkte	4	4	4	5	3	**20**
Note						

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

Aufgabe 1 – Basis und Koordinaten

Gegeben sind $b_1 = (1, 2, 0)$, $b_2 = (0, 1, 1)$, $b_3 = (1, 0, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $v = (2, 3, 1)$.

Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

Aufgabe 2 – Unterräume

Untersuchen Sie die Teilmengen des $\mathbb{R}^3$.

a) $U = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0\}$: Unterraum? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis an.
b) $W = \{(x, y, z) : xy = 0\}$: Unterraum?

Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

Aufgabe 3 – Polynome

Gegeben sind $1 + x$, $x + x^2$, $1 + x^2$ in P_2.

a) Zeigen Sie, dass sie linear unabhängig sind.
b) Bilden sie eine Basis von P_2?

Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

Aufgabe 4 – Schnitt zweier Ebenen

Gegeben sind $U = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ und $W = \text{span}\{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

a) Zeigen Sie $U + W = \mathbb{R}^3$.
b) Bestimmen Sie $\dim(U \cap W)$ und eine Basis von $U \cap W$.

Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

Aufgabe 5 – Farben mischen

Grün ist $(0, 255, 0)$, Blau ist $(0, 0, 255)$, Cyan ist $(0, 255, 255)$.

a) Liegt Cyan im Aufspann von Grün und Blau?
b) Welche Dimension hat dieser Aufspann?