Lösungen zur Klassenarbeit - Vektorräume, Basis und Dimension

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (4 BE/Punkte)

a) ; drei unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$

(2 P.).
b) $\alpha+\gamma=2$, $2\alpha+\beta=3$, $\beta+\gamma=1$: $\gamma=\frac{2}{3}$, $\alpha=\frac{4}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$; Probe $\frac{4}{3}(1,2,0)+\frac{1}{3}(0,1,1)+\frac{2}{3}(1,0,1)=(2,3,1)$ (2 P.).
Drei Vektoren im dreidimensionalen Raum bilden genau dann eine Basis, wenn ihre Determinante nicht verschwindet; eine Entwicklung nach der ersten Zeile genügt. Die Koordinaten erhält man aus einem linearen Gleichungssystem, dessen Spalten die Basisvektoren sind. Aus der ersten und dritten Gleichung drückt man α und β durch γ aus und setzt in die zweite ein.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) Kern einer linearen Abbildung, also Unterraum der Dimension 2; Basis $(1,2,0)$, $(0,1,1)$ (2 P.).
b) Nein: $(1,0,0),(0,1,0)\in W$, aber $(1,1,0)\notin W$ (2 P.).
Eine homogene lineare Gleichung beschreibt den Kern einer linearen Abbildung und damit einen Unterraum; seine Dimension ist drei minus eins. Für die Basis wählt man zwei unabhängige Lösungen und prüft sie durch Einsetzen. Bei W zerstört das Produkt xy die Abgeschlossenheit unter Addition, was ein einziges Gegenbeispiel belegt.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) $a(1+x)+b(x+x^2)+c(1+x^2)=0$ ergibt $a+c=0$, $a+b=0$, $b+c=0$, also $a=b=c=0$ (3 P.).
b) Ja, drei unabhängige Vektoren in P_2 mit $\dim P_2=3$ (1 P.).
Man setzt eine Linearkombination gleich dem Nullpolynom und vergleicht die Koeffizienten bei 1, x und x^2. Das entstehende homogene System hat nur die triviale Lösung, wie man durch Addition aller drei Gleichungen sieht: $2(a+b+c)=0$. Da der Polynomraum die Dimension drei hat, sind drei unabhängige Polynome automatisch eine Basis.

Lösung zu Aufgabe 4 (5 BE/Punkte)

a) Die vier Vektoren haben den Rang 3 (zum Beispiel sind $(1,0,1),(0,1,1),(1,0,0)$ unabhängig) (2 P.).

b) $\dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$. Vektoren in U: $(s, t, s + t)$; in W ist die dritte Komponente 0, also $t = -s$: $U \cap W = \text{span}\{(1, -1, 0)\}$ (3 P.).
Für die Summe genügt es, drei unabhängige Vektoren unter den vier Erzeugern zu finden. Die Dimensionsformel liefert dann die Dimension des Schnitts, ohne ihn zu berechnen. Für eine Basis beschreibt man die Elemente des ersten Unterraums mit zwei Parametern und fordert die Bedingung des zweiten, hier eine verschwindende dritte Komponente.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

a) Ja, Cyan $=$ Grün $+$ Blau (2 P.).
b) 2: Grün und Blau sind unabhängig (1 P.).
Cyan entsteht als Summe von Grün und Blau, beide mit vollem Anteil; damit liegt es im Aufspann. Die beiden Grundfarben sind nicht parallel, also linear unabhängig, und spannen eine Ebene im Farbraum auf. Rot liegt nicht in dieser Ebene, deshalb braucht ein Bildschirm alle drei Grundfarben für den vollen Farbraum.