Lernzettel - Vektorräume, Basis und Dimension

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Drei Farben genügen

Jeder Bildschirm erzeugt Millionen von Farbtönen aus nur drei Grundfarben: Rot, Grün und Blau. Ein Farbton ist dabei nichts anderes als ein Zahlentripel, zum Beispiel $(255, 128, 0)$ für ein kräftiges Orange. Man kann Farben addieren und mit Zahlen abschwächen, und keine der drei Grundfarben lässt sich aus den beiden anderen mischen. Mit genau drei Bausteinen lässt sich jede Farbe eindeutig zusammensetzen – mehr braucht man nicht, weniger reichen nicht. Diese Beobachtung ist der Kern der Begriffe dieses Kapitels: Die Farben bilden einen Vektorraum, Rot, Grün und Blau eine Basis, und die Zahl drei ist seine Dimension. Dieselben Begriffe beschreiben Polynome, Lösungsmengen von Gleichungssystemen, Schwingungen und digitale Bilder.

Vektorräume und Unterräume

Definition: Vektorräume und Unterräume

Ein **Vektorraum** über einem Körper K (meist $\mathbb{R}$) ist eine Menge V mit einer Addition $V \times V \to V$ und einer Skalarmultiplikation $K \times V \to V$, die acht Axiome erfüllen: Addition kommutativ und assoziativ, Nullvektor, additive Inverse, Distributivgesetze, $1 \cdot v = v$ und Assoziativität der Skalarmultiplikation. Beispiele: $\mathbb{R}^n$, der Raum $\mathbb{R}^{m \times n}$ der Matrizen, der Raum P_n der Polynome vom Grad $\leq n$, Funktionenräume.

Merke

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein **Unterraum**, wenn gilt: $0 \in U$, $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$, $\lambda \in K, u \in U \Rightarrow \lambda u \in U$ (Unterraumkriterium). Schnitte von Unterräumen sind Unterräume, Vereinigungen im Allgemeinen nicht. Die Summe ist $U + W = \{u + w\}$.

Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensysteme, Basis

Definition: Lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensysteme, Basis

Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$; sonst **linear abhängig** (dann ist ein Vektor Linearkombination der anderen). Die **lineare Hülle** $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ ist die Menge aller Linearkombinationen; sie ist ein Unterraum. Gilt $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$, heißt (v_i) ein **Erzeugendensystem**. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist eine **Basis**. Bezüglich einer Basis hat

jeder Vektor v eindeutig bestimmte **Koordinaten** λ_i mit $v = \sum \lambda_i v_i$.

Dimension

Definition: Dimension

Satz (Austauschsatz/Steinitz): Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums haben gleich viele Elemente. Diese Zahl heißt **Dimension** $\dim V$. In $\mathbb{R}^n$ sind n Vektoren genau dann eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind, genau dann, wenn sie ein Erzeugendensystem sind, genau dann, wenn $\det \neq 0$. Mehr als n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind stets linear abhängig. Jede linear unabhängige Menge lässt sich zu einer Basis ergänzen (Basisergänzungssatz). Für Unterräume gilt der **Dimensionssatz** $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$. Bekannte Dimensionen: $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$, $\dim P_n = n+1$.

So gehst du vor: Lineare Unabhängigkeit und Basis prüfen

1. Vektoren als Spalten einer Matrix schreiben.
2. Mit dem Gauß-Verfahren den Rang bestimmen.
3. Rang gleich Anzahl der Vektoren: linear unabhängig.
4. Rang gleich Dimension des Raums: Erzeugendensystem; beides zusammen: Basis.

Beispiel 1 (Unterraum)

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$: Es gilt $0 \in U$; sind $u, v \in U$, so gilt $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3) = 0$, und für λu ebenso. Basis: $(1,-1,0), (0,1,-1)$, $\dim U = 2$.

Beispiel 2 (Abhängigkeit)

$v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,3,4)$: Es ist $v_3 = v_1 + v_2$, also linear abhängig; $\det = 0$, der Rang ist 2.

Beispiel 3 (Basis)

$(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)$: $\det = 2 \neq 0$. Basis des $\mathbb{R}^3$. Koordinaten von $v = (2,3,4)$: $a+c = 2$, $a+b = 3$, $b+c = 4$ ergibt $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $c = \frac{3}{2}$.

Vektorräume überall

Ein Vektorraum ist eine Menge, in der man Elemente addieren und mit Zahlen eines Körpers K multiplizieren kann, sodass die üblichen Rechenregeln gelten: Assoziativ- und Kommutativgesetz der Addition, ein Nullvektor, inverse Elemente, zwei Distributivgesetze,

die Verträglichkeit der Skalarmultiplikationen und $1 \cdot v = v$. Wichtig ist, dass „Vektor“ nicht „Pfeil“ bedeuten muss. Vektorräume sind auch die Polynome vom Grad höchstens n, die stetigen Funktionen auf einem Intervall, die reellen $m \times n$-Matrizen und die reellen Zahlenfolgen. In all diesen Räumen kann man dieselben Begriffe benutzen und dieselben Sätze anwenden. Das ist die eigentliche Stärke der linearen Algebra.

Beispiel 4 (Lösungen einer Schwingungsgleichung)

Zeigen Sie, dass die Lösungen von $y'' + y = 0$ einen Vektorraum bilden.

Die Lösungsmenge ist eine Teilmenge des Vektorraums aller zweimal differenzierbaren Funktionen. Die Nullfunktion ist eine Lösung. Sind y_1, y_2 Lösungen und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt $(y_1 + y_2)'' + (y_1 + y_2) = (y_1'' + y_1) + (y_2'' + y_2) = 0$ und $(\lambda y_1)'' + \lambda y_1 = \lambda(y_1'' + y_1) = 0$. Nach dem Unterraumkriterium liegt also ein Unterraum vor. Er wird von $\sin$ und $\cos$ aufgespannt und hat die Dimension 2.

So gehst du vor: Ist U ein Unterraum?

1. Prüfen, ob der Nullvektor in U liegt; falls nicht, ist U kein Unterraum.
2. Zwei beliebige Elemente $u, v \in U$ wählen und zeigen, dass $u + v \in U$.
3. Zeigen, dass $\lambda u \in U$ für jedes $\lambda \in K$.
4. Für ein Gegenbeispiel genügt ein einziges Paar oder ein einziger Faktor, bei dem eine Bedingung verletzt ist.
5. Faustregel: Mengen, die durch homogene lineare Gleichungen beschrieben werden, sind Unterräume; Konstanten, Produkte oder Beträge in der Bedingung zerstören das meist.

Beispiel 5 (Ebene durch den Ursprung)

Ist $U = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$? Und $W = \{(x, y, z) : x + y = 1\}$?

U ist der Kern der Matrix $(1\ 2\ -1)$ und damit ein Unterraum; geometrisch eine Ebene durch den Ursprung mit der Dimension 2. Eine Basis ist $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$. W enthält den Nullvektor nicht, denn $0 + 0 \neq 1$; W ist eine verschobene Ebene und kein Unterraum.

Unabhängigkeit praktisch prüfen

Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor nur trivial aus ihnen kombinieren lässt. Im $\mathbb{R}^n$ schreibt man sie als Spalten einer Matrix und bestimmt den Rang: Sie sind genau dann unabhängig, wenn der Rang gleich k ist. Bei n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ genügt die Determinante. In anderen Räumen, etwa bei Polynomen, rechnet man mit Koordinaten bezüglich einer bekannten Basis oder setzt die Linearkombination gleich null und vergleicht die Koeffizienten.

Beispiel 6 (Polynome)

Sind $1+x$, $1-x$ und x^2 linear unabhängig?

Aus $a(1+x)+b(1-x)+cx^2=0$ folgt durch Koeffizientenvergleich $a+b=0$, $a-b=0$ und $c=0$, also $a=b=c=0$. Die drei Polynome sind unabhängig, und weil $\dim P_2=3$ ist, bilden sie sogar eine Basis von P_2.

Basis, Koordinaten und Basiswechsel

Eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem. Jeder Vektor lässt sich dann auf genau eine Weise als Linearkombination der Basisvektoren schreiben; die Koeffizienten heißen seine **Koordinaten**. Die Koordinaten hängen von der Basis ab: Derselbe Vektor hat in verschiedenen Basen verschiedene Koordinaten. Um sie zu berechnen, löst man ein lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix die Basisvektoren als Spalten enthält.

Satz: Basisergänzung und Austausch

Ist V endlichdimensional, so lässt sich jede linear unabhängige Menge zu einer Basis ergänzen, und aus jedem Erzeugendensystem kann man eine Basis auswählen. Nach dem Austauschsatz von Steinitz haben alle Basen gleich viele Elemente. Deshalb ist die Dimension wohldefiniert. In einem Raum der Dimension n sind n linear unabhängige Vektoren automatisch eine Basis, ebenso n Vektoren, die den Raum erzeugen.

Beispiel 7 (Koordinaten in einer schiefen Basis)

Bestimmen Sie die Koordinaten von $v=(3,1)$ bezüglich $b_1=(1,1)$, $b_2=(1,-1)$.

Aus $\alpha(1,1)+\beta(1,-1)=(3,1)$ folgt $\alpha+\beta=3$ und $\alpha-\beta=1$, also $\alpha=2$, $\beta=1$. Probe: $2(1,1)+(1,-1)=(3,1)$. In der neuen Basis hat v die Koordinaten $(2,1)$, in der Standardbasis die Koordinaten $(3,1)$.

Summe und Schnitt von Unterräumen

Der Schnitt zweier Unterräume ist wieder ein Unterraum, ihre Vereinigung dagegen meist nicht. An die Stelle der Vereinigung tritt die Summe $U+W=\{u+w : u\in U,\ w\in W\}$, der kleinste Unterraum, der beide enthält. Für die Dimensionen gilt die Formel $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$, die an die Inklusion und Exklusion beim Zählen erinnert. Ist $U\cap W=\{0\}$, spricht man von einer direkten Summe $U\oplus W$.

Beispiel 8 (Zwei Ebenen im Raum)

Warum schneiden sich zwei verschiedene Ebenen durch den Ursprung im $\mathbb{R}^3$ immer in einer Geraden?

Beide Ebenen haben die Dimension 2. Da sie verschieden sind, ist ihre Summe größer als jede einzelne, also $\dim(U+W)=3$. Die Formel liefert $\dim(U\cap W)=2+2-3=1$. Der Schnitt ist eine Gerade durch den Ursprung.

Achtung: Typische Fehler

Paarweise Unabhängigkeit genügt nicht: $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ sind paarweise nicht parallel, aber zusammen abhängig. Eine Menge, die den Nullvektor enthält, ist nie linear unabhängig. Die Dimension eines Unterraums ist nicht die Anzahl der Koordinaten seiner Vektoren: Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ hat die Dimension 2, obwohl ihre Vektoren drei Komponenten haben. Und die Vereinigung zweier Geraden durch den Ursprung ist kein Unterraum, weil die Summe zweier Vektoren aus verschiedenen Geraden herausfällt.

Wusstest du? Grassmann und Peano

Der Stettiner Gymnasiallehrer Hermann Grassmann entwickelte 1844 in seiner „Linealen Ausdehnungslehre“ die Begriffe Unabhängigkeit, Basis und Dimension, lange bevor sie allgemein verstanden wurden. Seine Zeitgenossen ignorierten das Werk weitgehend. Giuseppe Peano formulierte 1888 die Axiome eines Vektorraums in der heutigen Form. Erst im 20. Jahrhundert wurde die lineare Algebra zum Grundpfeiler jedes Mathematikstudiums.

Hinweis: Rang als Universalwerkzeug

Fast alle Fragen dieses Kapitels lassen sich im $\mathbb{R}^n$ mit einer einzigen Rechnung beantworten: Man schreibt die Vektoren als Spalten einer Matrix und bringt sie mit dem Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform. Der Rang ist die Dimension des aufgespannten Raums, die Spalten mit Pivotelement bilden eine Basis dieses Raums, und die freien Variablen liefern die Abhängigkeiten. In anderen Räumen übersetzt man zuerst in Koordinaten.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Vektorraum über K: Addition und Skalarmultiplikation mit den acht Rechenregeln; Beispiele $\mathbb{R}^n$, Polynome P_n, Matrizen, Funktionen, Folgen.
- Unterraumkriterium: $0 \in U$, $u+v \in U$, $\lambda u \in U$; Lösungsmengen homogener linearer Gleichungen sind Unterräume.
- Linear unabhängig: $\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$; im $\mathbb{R}^n$ über den Rang oder die Determinante prüfen.
- Basis = linear unabhängiges Erzeugendensystem; jeder Vektor hat eindeutige Koordinaten, die man durch Lösen eines LGS erhält.
- Alle Basen haben gleich viele Elemente (Steinitz): $\dim V$; unabhängige Mengen lassen sich zu Basen ergänzen.
- In einem n-dimensionalen Raum sind n unabhängige Vektoren automatisch eine Basis; mehr als n Vektoren sind stets abhängig.
- Dimensionsformel: $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$; die Vereinigung von Unterräumen ist meist kein Unterraum.

Achtung

Häufig vergessen: Der Nullvektor muss im Unterraum liegen ($\{x \geq 0\}$ und $\{x + y = 1\}$ sind keine Unterräume). Ein Erzeugendensystem ist noch keine Basis, und lineare Unabhängigkeit prüft man nicht paarweise, sondern für alle Vektoren gemeinsam.

Ottos Tipp

Schreiben Sie die Vektoren als Spalten in eine Matrix und bestimmen Sie den Rang: Rang $=$ Anzahl der Vektoren heißt linear unabhängig.