Arbeitsblatt - Vektorräume, Basis und Dimension

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Unterraum oder nicht?

Entscheiden Sie, ob die Teilmenge ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist. Beweisen Sie Ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) $U_1 = \{(x, y, z) : x = 2y\}$
b) $U_2 = \{(x, y, z) : z = 1\}$
c) $U_3 = \{(x, y, z) : x^2 = y\}$
d) $U_4 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0 \text{ und } x = z\}$

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Eine Linearkombination finden

Schreiben Sie $v = (5, 1, 4)$ als Linearkombination von $a = (1, 0, 1)$, $b = (1, 1, 0)$ und $c = (0, 1, 1)$.

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten auf.
b) Lösen Sie es.
c) Ist die Darstellung eindeutig? Begründen Sie.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Abhängig oder unabhängig?

Untersuchen Sie die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit. Geben Sie bei Abhängigkeit eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors an.

a) $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$
b) $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$
c) $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Basis eines Lösungsraums

Gegeben ist $U = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

a) Begründen Sie, dass U ein Unterraum ist, und bestimmen Sie $\dim U$ mit der Dimensionsformel.
b) Geben Sie eine Basis von U an.

c) Liegt $(1, 2, -3, 0)$ in U? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Koordinaten.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Koordinaten in verschiedenen Basen

Bestimmen Sie die Koordinaten bezüglich der angegebenen Basis.

a) $v = (3, 1)$ und $w = (0, 4)$ bezüglich $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (1, -1)$
b) $p(x) = x^2$ bezüglich der Basis $1,\ x - 1,\ (x - 1)^2$ von P_2
c) Warum verwendet man bei Taylorpolynomen die Basis aus Potenzen von $x - a$?

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Eine Basis aus Polynomen

Im Raum P_2 der Polynome vom Grad höchstens 2 betrachten wir $p_1 = 1 + x$, $p_2 = 1 - x$, $p_3 = x^2$.

a) Zeigen Sie, dass p_1, p_2, p_3 linear unabhängig sind.
b) Folgern Sie ohne weitere Rechnung, dass sie eine Basis von P_2 bilden.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten von $q = 3 + x + 2x^2$.

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Farben am Bildschirm

Bildschirmfarben werden als Vektoren (r, g, b) mit Rot-, Grün- und Blauanteil beschrieben. Wir rechnen mit reellen Anteilen. Rot ist $(255, 0, 0)$, Gelb ist $(255, 255, 0)$, Magenta ist $(255, 0, 255)$.

a) Mischen Sie Orange $(255, 128, 0)$ als Linearkombination von Rot und Gelb.
b) Lässt sich Magenta aus Rot und Gelb mischen? Begründen Sie.
c) Zeigen Sie, dass Rot, Gelb und Magenta eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
d) Warum braucht ein Bildschirm genau drei Grundfarben und nicht zwei oder vier?

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Saftmischungen

Ein Getränkehersteller beschreibt jeden Saft durch den Vektor (Vitamin C, Vitamin A, Zucker) in passenden Einheiten pro Liter: Apfel $A = (2, 1, 10)$, Birne $B = (1, 3, 8)$, Cocktail $C = (3, 4, 18)$.

a) Zeigen Sie, dass A, B, C linear abhängig sind, und deuten Sie das.
b) Lässt sich ein Saft mit dem Vektor $(5, 5, 28)$ mischen? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Anteile.
c) Lässt sich $(5, 5, 30)$ mischen?
d) Welche Dimension hat der Raum aller mischbaren Vektoren?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Magische Quadrate

Ein 3×3-Zahlenquadrat heißt magisch, wenn alle Zeilen, Spalten und beide Diagonalen dieselbe Summe haben. Das berühmte Lo-Shu-Quadrat aus China ist

.

a) Prüfen Sie, dass L magisch mit der Summe 15 ist.
b) Zeigen Sie, dass die magischen Quadrate einen Unterraum des Raums der 3×3-Matrizen bilden.

c) Zeigen Sie $L = 5J - 3A - B$ mit J (alle Einträge 1), ,

.

d) Man kann zeigen, dass J, A, B eine Basis dieses Unterraums bilden. Welche Dimension hat er? Was folgt daraus für die Zahl der frei wählbaren Einträge?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Schwingungen überlagern

Ein Tontechniker überlagert Signale $f(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$. Die Menge dieser Signale ist der Aufspann von $\sin$ und $\cos$ im Raum der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\sin$ und $\cos$ linear unabhängig sind. Setzen Sie dazu $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2}$ ein.
b) Zeigen Sie, dass $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ in diesem Raum liegt, und bestimmen Sie die Koordinaten.
c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\sin(2t)$ nicht darin liegt.
d) Welche Dimension hat der Raum, und was bedeutet das für die Beschreibung eines solchen Signals?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Ein Bild komprimieren

Ein winziges Graustufenbild aus vier Pixeln wird als Vektor $v = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$ gespeichert. Statt der Pixel speichert ein Kompressionsverfahren die Koordinaten in der Haar-Basis $h_1 = (1, 1, 1, 1)$, $h_2 = (1, 1, -1, -1)$, $h_3 = (1, -1, 1, -1)$, $h_4 = (1, -1, -1, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass die vier Vektoren paarweise senkrecht stehen, und folgern Sie, dass sie eine Basis bilden.

b) Wegen der Orthogonalität gilt für die Koordinaten $c_i = \frac{v \cdot h_i}{4}$. Berechnen Sie die

Koordinaten von $v = (9, 7, 5, 3)$.
c) Deuten Sie c_1 und c_2.
d) Das Verfahren speichert Koordinaten nahe 0 nicht. Welches Bild entsteht für $v = (10, 6, 6, 2)$, wenn man die kleinste Koordinate weglässt?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Boot gegen die Strömung

Ein Motorboot fährt mit dem Motor in Richtung $u = (3, 1)$ (km pro Stunde Motorbetrieb). Eine Strömung trägt das Boot in Richtung $w = (1, 2)$ (km pro Stunde, wenn man sich treiben lässt). Der Kapitän kann Motorzeit und Treibzeit frei kombinieren und will vom Ursprung zum Steg bei $(11, 7)$.

a) Zeigen Sie, dass u und w eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.
b) Wie viele Stunden muss er mit Motor fahren und wie viele treiben?
c) Kann er jeden Punkt der Ebene erreichen? Was würde sich ändern, wenn $w = (6, 2)$ wäre?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Summe und Schnitt

Untersuchen Sie Summe und Schnitt von Unterräumen des $\mathbb{R}^3$.

a) $U = \operatorname{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $W = \operatorname{span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$: Bestimmen Sie $U \cap W$ und $U + W$ und prüfen Sie die Dimensionsformel.
b) Bestimmen Sie den Schnitt der Ebenen $x + y + z = 0$ und $x - y = 0$.
c) Ist die Vereinigung $U \cup W$ aus a) ein Unterraum?

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Eine Basis ergänzen

Gegeben sind $v_1 = (1, 1, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind.
b) Ergänzen Sie mit einem Einheitsvektor zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$. Prüfen Sie mit der Determinante.
c) Welche Vektoren eignen sich nicht zur Ergänzung? Prüfen Sie e_2 und $(1, 2, 1)$.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Unterräume von Polynomen

Wir betrachten Teilmengen des Raums P_3 der Polynome vom Grad höchstens 3 ($\dim P_3 = 4$).

a) Zeigen Sie, dass $U = \{p \in P_3 : p(1) = 0\}$ ein Unterraum ist, und bestimmen Sie $\dim U$.
b) Zeigen Sie, dass $(x - 1), (x - 1)^2, (x - 1)^3$ eine Basis von U ist.

c) Ist $\{p \in P_3 : p(1) = 1\}$ ein Unterraum?
d) Zeigen Sie, dass $W = \{p \in P_3 : p(0) = p(2)\}$ ein Unterraum mit der Basis $1,\ x^2 - 2x,\ x^3 - 4x$ ist.
e) Bestimmen Sie $\dim(U \cap W)$ mit der Dimensionsformel, wenn $U + W = P_3$ gilt.

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Symmetrische und schiefe Matrizen

Im Raum V der reellen 2×2-Matrizen ($\dim V = 4$) betrachten wir die symmetrischen Matrizen S ($A^T = A$) und die schiefsymmetrischen Matrizen K ($A^T = -A$).

a) Bestimmen Sie Basen und Dimensionen von S und K.
b) Zeigen Sie $S \cap K = \{0\}$.
c) Zerlegen Sie $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ mit $\frac{1}{2}(M + M^T)$ und $\frac{1}{2}(M - M^T)$.
d) Folgern Sie $V = S \oplus K$ und prüfen Sie die Dimensionsformel.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Folgen mit einer Rekursion

Die Menge F aller reellen Folgen mit $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ für alle $n \geq 0$ ist ein Unterraum des Raums aller Folgen.

a) Zeigen Sie, dass F ein Unterraum ist.
b) Begründen Sie, dass eine Folge in F durch a_0, a_1 festgelegt ist, und folgern Sie $\dim F = 2$.
c) Zeigen Sie, dass die geometrischen Folgen (2^n) und $((-1)^n)$ in F liegen und eine Basis bilden.
d) Bestimmen Sie die Folge mit $a_0 = 0$, $a_1 = 3$ in dieser Basis und prüfen Sie a_2, a_3.

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Lösungsraum und Basistest

Gegeben ist .

a) Bestimmen Sie den Rang von A und die Dimension von $\ker A$.
b) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$.
c) Bilden $(2, -1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0, 1)$, $(3, -2, 1, 0, 1)$ eine Basis von $\ker A$? Begründen Sie.
d) Ergänzen Sie die ersten beiden Vektoren aus c) zu einer Basis des Kerns.

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Ein Code mit Prüfbit

Digitale Daten werden über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ (mit $1 + 1 = 0$) übertragen. Ein Paritätscode hängt an drei Datenbits x_1, x_2, x_3 ein Prüfbit $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$ an. Die Codewörter bilden eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{F}_2^4$.

a) Zeigen Sie, dass C ein Unterraum von $\mathbb{F}_2^4$ ist, und geben Sie eine Basis an.
b) Wie viele Codewörter gibt es? Wie viele Vektoren hat $\mathbb{F}_2^4$?
c) Zeigen Sie: Wird bei der Übertragung genau ein Bit verfälscht, ist das empfangene Wort kein Codewort.
d) Wie viele geordnete Basen hat der Raum $\mathbb{F}_2^3$? Zählen Sie die Wahlmöglichkeiten für den ersten, zweiten und dritten Vektor.

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: Unendlich viele Dimensionen

Nicht jeder Vektorraum ist endlichdimensional.

a) Zeigen Sie, dass die Monome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ für jedes n im Raum aller Polynome linear unabhängig sind.
b) Folgern Sie, dass der Raum $\mathbb{R}[x]$ aller Polynome keine endliche Basis hat.
c) Zeigen Sie, dass e^x, e^{2x}, e^{3x} linear unabhängig sind. Leiten Sie dazu $\alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{3x} = 0$ zweimal ab und setzen Sie $x = 0$ ein.
d) Begründen Sie, dass auch der Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ unendlichdimensional ist.