Lösungen - Vektorräume, Basis und Dimension

Klasse: Studium 1 Semester

Lösung zu Aufgabe 1

a) Ja. Der Nullvektor erfüllt $0 = 2 \cdot 0$. Aus $x_1 = 2y_1$ und $x_2 = 2y_2$ folgt $x_1 + x_2 = 2(y_1 + y_2)$ und $\lambda x_1 = 2(\lambda y_1)$. Die Bedingung ist eine homogene lineare Gleichung, U_1 ist eine Ebene durch den Ursprung.
b) Nein. Der Nullvektor hat $z = 0 \neq 1$ und liegt nicht in U_2. Geometrisch ist U_2 eine zur xy-Ebene parallele, aber verschobene Ebene.
c) Nein. $(1, 1, 0) \in U_3$, aber $2 \cdot (1, 1, 0) = (2, 2, 0)$ erfüllt $2^2 = 4 \neq 2$. Die quadratische Bedingung zerstört die Abgeschlossenheit unter Vielfachen.
d) Ja. U_4 ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen, also ein Unterraum. Mit $x = z = s$ folgt $y = -2s$: $U_4 = \operatorname{span}\{(1, -2, 1)\}$, eine Gerade durch den Ursprung.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Aus $\alpha a + \beta b + \gamma c = v$ folgt komponentenweise $\alpha + \beta = 5$, $\beta + \gamma = 1$ und $\alpha + \gamma = 4$. Jede Komponente des Vektors liefert eine Gleichung.
b) Addiert man alle drei Gleichungen, erhält man $2(\alpha + \beta + \gamma) = 10$, also $\alpha + \beta + \gamma = 5$. Daraus folgt $\gamma = 0$, $\alpha = 4$, $\beta = 1$. Probe: $4(1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (5, 1, 4)$.
c) Ja. Die Determinante der Matrix mit den Spalten a, b, c ist $2 \neq 0$. Die drei Vektoren bilden also eine Basis, und Koordinaten bezüglich einer Basis sind eindeutig.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Matrix mit diesen Spalten hat den Rang 2. Man findet $(7, 8, 9) = 2(4, 5, 6) - (1, 2, 3)$, also $(1, 2, 3) - 2(4, 5, 6) + (7, 8, 9) = 0$: linear abhängig. Die Vektoren liegen in einer Ebene durch den Ursprung.
b) Die Determinante der Matrix mit diesen Spalten ist $1 \cdot (1 - 0) - 0 + 1 \cdot (1 - 0) = 2 \neq 0$. Die Vektoren sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
c) Drei Vektoren im zweidimensionalen $\mathbb{R}^2$ sind immer abhängig. Konkret: $(1, 2) - 2(3, 4) + (5, 6) = (1 - 6 + 5,\ 2 - 8 + 6) = (0, 0)$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) U ist der Kern der 1×4-Matrix $(1\ 1\ 1\ 1)$ mit Rang 1. Nach der Dimensionsformel ist $\dim U = 4 - 1 = 3$: eine „Hyperebene“ im vierdimensionalen Raum.
b) Mit den freien Variablen $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_4 = t$ ist $x_1 = -r - s - t$. Basis: $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$. Die Vektoren sind unabhängig, weil jeder in einer anderen Koordinate eine 1 hat.

c) $1 + 2 - 3 + 0 = 0$, also ja. Die Koordinaten sind $r = 2$, $s = -3$, $t = 0$, denn $2(-1, 1, 0, 0) - 3(-1, 0, 1, 0) = (1, 2, -3, 0)$.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Für v: $\alpha + \beta = 3$, $\alpha - \beta = 1$, also $(\alpha, \beta) = (2, 1)$. Für w: $\alpha + \beta = 0$, $\alpha - \beta = 4$, also $(2, -2)$. Probe: $2(1, 1) - 2(1, -1) = (0, 4)$.
b) Mit $x = (x - 1) + 1$ folgt $x^2 = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1$. Die Koordinaten sind $(1, 2, 1)$. Probe durch Ausmultiplizieren: $x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = x^2$.
c) In dieser Basis lassen sich die Koordinaten direkt als $\frac{p^{(k)}(a)}{k!}$ ablesen. Das Taylorpolynom ist nichts anderes als die Koordinatendarstellung in der an a angepassten Basis.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Aus $a(1 + x) + b(1 - x) + cx^2 = 0$ folgt durch Koeffizientenvergleich bei 1, x und x^2: $a + b = 0$, $a - b = 0$, $c = 0$. Also $a = b = c = 0$.
b) $\dim P_2 = 3$, denn $1, x, x^2$ ist eine Basis. Drei unabhängige Vektoren in einem dreidimensionalen Raum bilden automatisch eine Basis.
c) Aus $a + b = 3$, $a - b = 1$, $c = 2$ folgt $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$. Probe: $2 + 2x + 1 - x + 2x^2 = 3 + x + 2x^2$.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Aus $\alpha(255, 0, 0) + \beta(255, 255, 0) = (255, 128, 0)$ folgt $255\beta = 128$, also $\beta = \frac{128}{255} \approx 0{,}502$, und $\alpha + \beta = 1$, also $\alpha \approx 0{,}498$. Orange ist fast eine Halb-und-halb-Mischung.
b) Nein. Rot und Gelb haben beide den Blauanteil 0, jede Mischung ebenfalls. Magenta hat den Blauanteil 255 und liegt nicht im Aufspann.
c) Die Determinante der Matrix mit den Spalten Rot, Gelb, Magenta ist $255 \cdot (255 \cdot 255 - 0) - \cdots = 255^3 \neq 0$ (Entwicklung nach der zweiten Zeile ergibt $-255 \cdot (0 - 255^2)$). Also unabhängig und Basis.
d) Der Farbraum hat die Dimension 3. Mit zwei Farben erreicht man nur eine Ebene, mit vier Farben wären die Mischungen nicht mehr eindeutig, da vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ abhängig sind.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Es gilt $A + B = (3, 4, 18) = C$. Der Cocktail ist also selbst eine Mischung aus einem Liter Apfel und einem Liter Birne und bringt keine neue Richtung hinzu.
b) $\alpha A + \beta B = (5, 5, 28)$: $2\alpha + \beta = 5$ und $\alpha + 3\beta = 5$ ergeben $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Die dritte Komponente: $20 + 8 = 28$. Zwei Liter Apfel und ein Liter Birne.
c) Mit $\alpha = 2$, $\beta = 1$ aus den ersten beiden Komponenten erhält man den Zucker $28 \neq 30$. Der Vektor liegt nicht in der Ebene, die A und B aufspannen; er ist nicht mischbar.

d) $\operatorname{span}\{A, B, C\} = \operatorname{span}\{A, B\}$ hat die Dimension 2, eine Ebene im dreidimensionalen Nährstoffraum.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Zeilen: $2+7+6 = 9+5+1 = 4+3+8 = 15$. Spalten: $2+9+4 = 7+5+3 = 6+1+8 = 15$. Diagonalen: $2+5+8 = 6+5+4 = 15$.
b) Alle Bedingungen „Summe der Zeile gleich Summe der ersten Zeile“ usw. sind homogene lineare Gleichungen in den neun Einträgen. Die Lösungsmenge eines homogenen Systems ist ein Unterraum; die Nullmatrix ist magisch.
c) $5J - 3A - B$ hat in der ersten Zeile $5-3-0 = 2$, $5+3-1 = 7$, $5-0+1 = 6$; in der zweiten $5+3+1 = 9$, 5, $5-3-1 = 1$; in der dritten $5-0-1 = 4$, $5-3+1 = 3$, $5+3-0 = 8$. Das ist genau L.
d) Die Dimension ist 3. Ein magisches Quadrat ist also durch drei Zahlen bestimmt, etwa durch die Koordinaten bezüglich J, A, B; die übrigen sechs Einträge ergeben sich zwangsläufig.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Aus $\alpha \sin t + \beta \cos t = 0$ für alle t folgt bei $t = 0$: $\beta = 0$, bei $t = \frac{\pi}{2}$: $\alpha = 0$. Also nur die triviale Kombination.
b) Nach dem Additionstheorem ist $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin t \cos\frac{\pi}{4} + \cos t \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$. Koordinaten $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Eine Phasenverschiebung bleibt im Raum.
c) Wäre $\sin 2t = \alpha \sin t + \beta \cos t$, so ergäbe $t = 0$: $\beta = 0$, und $t = \frac{\pi}{2}$: $0 = \alpha$. Dann wäre $\sin 2t$ die Nullfunktion, ein Widerspruch ($\sin\frac{2\pi}{4} = 1$).
d) Dimension 2: Jedes Signal ist durch zwei Zahlen beschrieben, etwa Amplitude und Phase oder die beiden Koordinaten. Höhere Frequenzen liegen in anderen Richtungen des Funktionenraums.

Lösung zu Aufgabe 11

a) Alle Skalarprodukte verschiedener Vektoren sind 0, zum Beispiel $h_2 \cdot h_3 = 1-1-1+1 = 0$. Paarweise orthogonale Vektoren ungleich null sind linear unabhängig; vier davon im $\mathbb{R}^4$ bilden eine Basis.
b) $c_1 = \frac{24}{4} = 6$, $c_2 = \frac{9+7-5-3}{4} = 2$, $c_3 = \frac{9-7+5-3}{4} = 1$, $c_4 = \frac{9-7-5+3}{4} = 0$. Probe: $6h_1 + 2h_2 + h_3 = (9, 7, 5, 3)$.
c) c_1 ist die mittlere Helligkeit aller Pixel, c_2 der Unterschied zwischen erster und zweiter Bildhälfte. Die übrigen Koordinaten beschreiben feinere Details.
d) Koordinaten: $c_1 = 6$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$, $c_4 = 0$. Lässt man $c_4 = 0$ weg, ändert sich nichts: Das Bild wird exakt mit drei statt vier Zahlen gespeichert. Bei echten Fotos sind viele Koordinaten fast null, das spart Speicher.

Lösung zu Aufgabe 12

a) $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$. Die Vektoren sind unabhängig, und zwei unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ bilden eine Basis.
b) Aus $a(3,1) + b(1,2) = (11,7)$ folgt $3a + b = 11$, $a + 2b = 7$. Elimination ergibt $a = 3$, $b = 2$: drei Stunden Motor, zwei Stunden treiben. Probe: $(9 + 2,\ 3 + 4) = (11,7)$.
c) Mathematisch erreicht er jeden Punkt, weil u, w eine Basis bilden; negative Zeiten wären allerdings Rückwärtsfahrten. Mit $w = (6,2) = 2u$ wären beide Richtungen parallel, und er käme nur auf eine Gerade.

Lösung zu Aufgabe 13

a) U ist die xy-Ebene, W die yz-Ebene. Der Schnitt ist die y-Achse, $\dim 1$. Die Summe enthält alle Einheitsvektoren, also $U + W = \mathbb{R}^3$. Kontrolle: $3 = 2 + 2 - 1$.
b) Aus $x = y$ und $x + y + z = 0$ folgt $z = -2x$. Der Schnitt ist die Gerade $\operatorname{span}\{(1,1,-2)\}$, wie die Dimensionsformel für zwei verschiedene Ebenen vorhersagt.
c) Nein: $(1,0,0) \in U$ und $(0,0,1) \in W$, aber ihre Summe $(1,0,1)$ liegt weder in U noch in W. Deshalb arbeitet man mit der Summe statt mit der Vereinigung.

Lösung zu Aufgabe 14

a) Keiner der beiden Vektoren ist ein Vielfaches des anderen (die erste Komponente von v_2 ist 0, die von v_1 nicht). Zwei Vektoren sind genau dann abhängig, wenn sie parallel sind.

b) Mit $e_1 = (1,0,0)$: . Also bilden v_1, v_2, e_1 eine Basis. Der

Basisergänzungssatz garantiert, dass unter den Einheitsvektoren immer ein passender ist.
c) Ungeeignet sind genau die Vektoren der Ebene $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. Für e_2 folgt aus $\alpha v_1 + \beta v_2 = (0,1,0)$ mit der ersten und dritten Komponente $\alpha = \beta = 0$, dann wäre die zweite $0 \neq 1$: e_2 eignet sich also. Dagegen ist $(1,2,1) = v_1 + v_2$ abhängig und eignet sich nicht.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Die Abbildung $p \mapsto p(1)$ ist linear, U ist ihr Kern. Sie ist nicht die Nullabbildung ($1 \mapsto 1$), ihr Bild ist $\mathbb{R}$. Nach der Dimensionsformel ist $\dim U = 4 - 1 = 3$.
b) Alle drei Polynome haben in 1 eine Nullstelle, liegen also in U. Sie haben verschiedene Grade und sind deshalb linear unabhängig. Drei unabhängige Vektoren im dreidimensionalen U bilden eine Basis.
c) Nein, das Nullpolynom erfüllt $0(1) = 0 \neq 1$.
d) $p \mapsto p(0) - p(2)$ ist linear, W ihr Kern, also ein Unterraum der Dimension 3. Die drei Polynome erfüllen die Bedingung ($0 = 0$, $0 = 4 - 4$, $0 = 8 - 8$) und sind unabhängig (verschiedene Grade).
e) $\dim(U \cap W) = 3 + 3 - 4 = 2$. Der Schnitt besteht aus den Polynomen mit $p(1) = 0$ und $p(0) = p(2)$.

Lösung zu Aufgabe 16

a) S: Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, Basis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim S = 3$. K: Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, Basis $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\dim K = 1$.
b) Ist A beides, so gilt $A = A^T = -A$, also $2A = 0$ und $A = 0$.
c) $\frac{1}{2}(M + M^T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch, $\frac{1}{2}(M - M^T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist schiefsymmetrisch, und die Summe ist M.
d) Die Zerlegung aus c) funktioniert für jede Matrix, also $S + K = V$, und der Schnitt ist $\{0\}$. Dimensionsformel: $4 = 3 + 1 - 0$.

Lösung zu Aufgabe 17

a) Die Nullfolge erfüllt die Rekursion. Die Bedingung ist linear und homogen, also erfüllen Summen und Vielfache von Lösungen sie ebenfalls.
b) Aus a_0, a_1 berechnet man alle weiteren Glieder schrittweise. Die Abbildung $F \to \mathbb{R}^2$, $(a_n) \mapsto (a_0, a_1)$ ist linear und bijektiv; also $\dim F = 2$.
c) $q^{n+2} = q^{n+1} + 2q^n \iff q^2 = q + 2 \iff q = 2$ oder $q = -1$. Die Startwerte $(1, 2)$ und $(1, -1)$ sind unabhängig, also bilden die beiden Folgen eine Basis.
d) $c_1 + c_2 = 0$, $2c_1 - c_2 = 3$ ergibt $c_1 = 1$, $c_2 = -1$: $a_n = 2^n - (-1)^n$. Kontrolle: $a_2 = 4 - 1 = 3 = 3 + 0$, $a_3 = 8 + 1 = 9 = 3 + 2 \cdot 3$.

Lösung zu Aufgabe 18

a) Die dritte Zeile ist die Summe der ersten beiden, der Rang ist 2. Nach der Dimensionsformel ist $\dim \ker A = 5 - 2 = 3$.
b) Aus $x_2 + x_3 + x_5 = 0$ und $x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 0$ mit den freien Variablen $x_3 = r$, $x_4 = s$, $x_5 = t$: $x_2 = -r - t$, $x_1 = 2r - s + t$. Basis: $(2, -1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0, 1, 0)$, $(1, -1, 0, 0, 1)$.
c) Nein. Alle drei liegen im Kern, aber der dritte ist die Summe der ersten beiden. Sie sind abhängig und spannen nur einen zweidimensionalen Teilraum auf.
d) Der fehlende Vektor muss eine von null verschiedene vierte Komponente haben, etwa $(-1, 0, 0, 1, 0)$. Dann sind die drei Vektoren unabhängig und bilden eine Basis.

Lösung zu Aufgabe 19

a) C ist die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ über $\mathbb{F}_2$, also ein Unterraum. Basis: $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$; $\dim C = 3$.
b) Ein dreidimensionaler Raum über $\mathbb{F}_2$ hat $2^3 = 8$ Elemente, $\mathbb{F}_2^4$ hat $2^4 = 16$. Genau die Hälfte aller Wörter sind Codewörter.
c) Ein Codewort hat eine gerade Anzahl von Einsen (die Summe aller Bits ist 0). Ein einzelner Bitfehler ändert diese Summe um 1; das empfangene Wort verletzt die Prüfgleichung und wird als fehlerhaft erkannt.
d) Erster Vektor: jeder außer 0, also 7. Zweiter: nicht im Aufspann des ersten (2

Elemente), also 6. Dritter: nicht in der Ebene der ersten beiden (4 Elemente), also 4. Insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ geordnete Basen.

Lösung zu Aufgabe 20

a) Ist $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ das Nullpolynom, so verschwinden nach Definition alle Koeffizienten. (Alternativ: Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n Nullstellen, kann also nicht überall null sein.)
b) Hätte $\mathbb{R}[x]$ die Dimension n, so wären je $n+1$ Vektoren abhängig. Die $n+1$ Monome $1, \ldots, x^n$ sind aber unabhängig – ein Widerspruch.
c) Bei $x = 0$ erhält man aus der Gleichung und ihren Ableitungen $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0$, $\alpha + 4\beta + 9\gamma = 0$. Die Determinante (Vandermonde) ist $(2-1)(3-1)(3-2) = 2 \neq 0$, also nur die triviale Lösung.
d) Die Polynome sind stetige Funktionen. Der Raum enthält also für jedes n eine unabhängige Menge mit $n+1$ Elementen und kann keine endliche Dimension haben.