Lösungen zur Klassenarbeit - Taylorreihen und Potenzreihen

Klasse: Studium 1 Semester · Dauer: 60 Minuten · /20

Lösung zu Aufgabe 1 (5 BE/Punkte)

a) $f(4)=2$, $f'(4)=\frac{1}{4}$, $f''(4)=-\frac{1}{32}$, $f'''(x)=\frac{3}{8x^{5/2}}$, also $f'''(4)=\frac{3}{256}$. Damit $T_3(x)=2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(x-4)^3}{512}$ (3 P.).

b) $2+0{,}1-0{,}0025+0{,}000125=2{,}097625$; Fehler etwa $7\cdot 10^{-6}$ (2 P.).

Die Ableitungen von $\sqrt{x}$ sind Potenzen mit gebrochenen Exponenten; man wertet sie an der Stelle vier aus, wo die Wurzel exakt bekannt ist. Jeder Ableitungswert wird durch die passende Fakultät geteilt, deshalb steht im kubischen Glied $\frac{3/256}{6}=\frac{1}{512}$. Die Näherung für $\sqrt{4{,}4}$ ist auf fünf Stellen genau, weil der Abstand $0{,}4$ klein ist.

Lösung zu Aufgabe 2 (4 BE/Punkte)

a) $\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{k\cdot 3}{k+1}\to 3$: $\rho=3$ (2 P.).

b) Bei $x=\pm 3$ sind die Glieder k bzw. $(-1)^k k$, keine Nullfolge: divergent. Bereich $(-3,3)$ (2 P.).

Der Quotient aufeinanderfolgender Koeffizienten strebt gegen drei; das ist der Konvergenzradius. Innerhalb dieses Intervalls konvergiert die Reihe absolut, außerhalb divergiert sie. An den Randpunkten setzt man ein und prüft das notwendige Kriterium: Die Glieder haben den Betrag k und bilden keine Nullfolge. Beide Ränder gehören deshalb nicht zum Konvergenzbereich.

Lösung zu Aufgabe 3 (4 BE/Punkte)

a) Zähler $\frac{x^3}{6}+\ldots$: Grenzwert $\frac{1}{6}$ (2 P.).

b) Zähler $-\frac{x^3}{6}+\ldots$: Grenzwert $-\frac{1}{6}$ (2 P.).

Man setzt die Exponentialreihe beziehungsweise die Sinusreihe ein; alle Glieder bis zur zweiten Ordnung heben sich gegen die abgezogenen Terme auf. Übrig bleibt im Zähler als erstes Glied ein Vielfaches von x^3, das sich mit dem Nenner kürzt. Die höheren Glieder verschwinden beim Grenzübergang. Dreimaliges Anwenden von L'Hospital führt zum selben Ergebnis, ist aber länger.

Lösung zu Aufgabe 4 (4 BE/Punkte)

a) $\cos u\approx 1-\frac{u^2}{2}$ mit $u=\frac{s}{R}$ (2 P.).

b) $\frac{25}{12742}$ km $\approx 1{,}96$ m (2 P.).

Für kleine Argumente ersetzt man den Kosinus durch sein Taylorpolynom zweiten Grades; der Radius kürzt sich teilweise heraus. Wichtig ist, alle Größen in derselben Einheit zu rechnen: Mit Kilometern erhält man das Ergebnis in Kilometern und rechnet danach in Meter um. Die Absenkung wächst quadratisch: Bei doppelter Entfernung ist sie viermal so groß.

Lösung zu Aufgabe 5 (3 BE/Punkte)

$0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}000333 = 0{,}095333$; alternierend, Fehler höchstens $\frac{0{,}1^4}{4} = 0{,}000025$ (genau $0{,}095310$) (3 P.).
Die Logarithmusreihe entsteht durch gliedweise Integration der geometrischen Reihe für $\frac{1}{1+t}$ von 0 bis x. Für $x = 0{,}1$ sind die Glieder klein und wechseln das Vorzeichen, deshalb liefert das Leibniz-Kriterium eine einfache Fehlerschranke: das vierte Glied. Der tatsächliche Fehler $0{,}000023$ bestätigt diese Abschätzung. Mit vier Gliedern würde der Fehler auf etwa $2 \cdot 10^{-6}$ sinken.