Lernzettel - Taylorreihen und Potenzreihen

Klasse: Studium 1 Semester

Einstieg: Wie rechnet der Taschenrechner?

Tippt man $\sin(0{,}5)$ in einen Taschenrechner, erscheint sofort $0{,}4794255386$. Im Inneren des Geräts gibt es aber keine Tabelle mit allen Sinuswerten, und Dreiecke werden auch nicht gezeichnet. Der Rechner kann nur addieren, multiplizieren und dividieren. Die Lösung des Rätsels: Er ersetzt die Funktion durch ein Polynom, das in der Nähe eines Punktes fast genau mit ihr übereinstimmt. So ist $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, und für $x = 0{,}5$ liefert schon dieses kurze Polynom fünf richtige Nachkommastellen. Wie man solche Polynome findet, wie genau sie sind und wann aus ihnen unendliche Reihen werden, die die Funktion exakt darstellen, ist das Thema dieses Kapitels. Taylorpolynome sind eines der wichtigsten Werkzeuge der Analysis, der Physik und der Numerik.

Taylorpolynome und Restglied

Definition: Taylorpolynome und Restglied

Ist f in a n-mal differenzierbar, so approximiert das **Taylorpolynom**

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

Satz

die Funktion nahe a besonders gut: T_n stimmt mit f in den Ableitungen bis zur Ordnung n an der Stelle a überein. Der Fehler $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ wird durch den **Satz von Taylor** kontrolliert. Die **Lagrange-Form des Restglieds** lautet $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ mit einem ξ zwischen a und x. Damit lassen sich Fehler abschätzen: Für e^x auf $[0;0{,}1]$ gilt $|R_3(x)| \le \frac{e^{0{,}1}\cdot 0{,}1^4}{24}$. Der Spezialfall $n = 0$ ist der Mittelwertsatz.

Taylorreihen und Standardreihen

Definition: Taylorreihen und Standardreihen

Ist f beliebig oft differenzierbar, nennt man $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ die **Taylorreihe**. Sie konvergiert nicht immer gegen f; sie tut es genau dann, wenn $R_n(x) \to 0$ gilt. Die wichtigsten Reihen (Entwicklung um 0):

Merke

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

Merke

2. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$,

Merke

3. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$,

Merke

4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $|x|$,

Merke

5. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$ für -1,

Merke

6. $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ für $|x| \leq 1$, woraus $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$ folgt.

Potenzreihen und Konvergenzradius

Definition: Potenzreihen und Konvergenzradius

Eine **Potenzreihe** hat die Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$. Es gibt einen **Konvergenzradius** $\rho \in [0, \infty]$: Die Reihe konvergiert absolut für $|x-a|$ und divergiert für $|x-a| > \rho$; auf dem Rand $|x-a| = \rho$ muss man jeden Punkt einzeln prüfen. Berechnung: (falls der Grenzwert existiert)

oder $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$ (Cauchy-Hadamard). Beispiele: $\sum \frac{x^k}{k!}$ hat $\rho = \infty$, $\sum x^k$ und $\sum k x^k$ haben $\rho = 1$, $\sum k! x^k$ hat $\rho = 0$. Innerhalb des Konvergenzradius ist die Summenfunktion beliebig oft differenzierbar, und man darf **gliedweise differenzieren und integrieren**: $\left(\sum a_k x^k\right)' = \sum k a_k x^{k-1}$ mit

demselben Radius. So folgt aus $\sum x^k = \frac{1}{1-x}$ durch Ableiten $\sum k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

So gehst du vor: Taylorpolynom und Konvergenzradius

1. Ableitungen $f^{(k)}(a)$ berechnen.
2. Koeffizienten $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ einsetzen.
3. Fehler mit dem Lagrange-Restglied abschätzen.
4. Konvergenzradius [redacted] bestimmen und die Randpunkte einzeln prüfen.

Beispiel 1

Taylorpolynom von $f(x) = \ln x$ um $a = 1$: $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f^{(3)}(1) = 2$. Also $T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$.

Beispiel 2 (Konvergenzradius)

$\sum \frac{(x-2)^k}{k \cdot 3^k}$: $a_k = \frac{1}{k3^k}$, [redacted] . $\rho = 3$, Konvergenz für $x \in (-1;5)$. Rand: $x = 5$ ergibt $\sum \frac{1}{k}$ (divergent), $x = -1$ ergibt $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ (konvergent). Konvergenzbereich $[-1;5)$.

Beispiel 3 (Näherung)

$\sin 1 \approx T_5(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0{,}84167$. Fehler $|R| \leq \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \approx 0{,}0002$ (denn $T_5 = T_6$ bei $\sin$). Tatsächlich $\sin 1 = 0{,}84147$.

Die Idee: Ableitungen angleichen

Die Tangente $t(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ ist das Polynom ersten Grades, das an der Stelle a denselben Funktionswert und dieselbe Steigung wie f hat. Verlangt man zusätzlich gleiche Krümmung, also gleiche zweite Ableitung, erhält man eine Parabel, die sich noch enger an den Graphen schmiegt. Allgemein sucht man das Polynom T_n vom Grad höchstens n, dessen Ableitungen bis zur Ordnung n an der Stelle a mit denen von f übereinstimmen. Weil die k-te Ableitung von $(x-a)^k$ an der Stelle a den Wert $k!$ hat, muss der Koeffizient vor $(x-a)^k$ gleich $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ sein. So entsteht die Formel für das Taylorpolynom.

So gehst du vor: Taylorpolynom berechnen

1. Die Ableitungen $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ bestimmen und ein Muster suchen.
2. Alle an der Entwicklungsstelle a auswerten.
3. Jeden Wert durch $k!$ teilen und mit $(x-a)^k$ multiplizieren.
4. Die Summanden addieren und das Ergebnis mit einem Zahlenwert nahe a kontrollieren.

Beispiel 4 (Logarithmus um 0)

Bestimmen Sie T_3 von $f(x) = \ln(1+x)$ um $a = 0$ und nähern Sie $\ln 1{,}1$.

Es ist $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, also $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$. Damit ist $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. Für $x = 0{,}1$ erhält man $0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}000333 = 0{,}095333$; der genaue Wert ist $0{,}095310$. Der Fehler ist kleiner als das nächste Glied $\frac{0{,}1^4}{4} = 0{,}000025$.

Wie genau ist die Näherung?

Die Differenz $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ heißt Restglied. Nach Lagrange gibt es eine Zwischenstelle ξ zwischen a und x mit $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Die Stelle ξ kennt man nicht, aber man kann die $(n+1)$-te Ableitung auf dem Intervall nach oben abschätzen. Das liefert eine garantierte Fehlerschranke. Man sieht an der Formel auch, warum Taylorpolynome so gut sind: Der Fehler enthält die hohe Potenz $(x-a)^{n+1}$, die nahe bei a winzig ist, und die Fakultät im Nenner, die sehr schnell wächst.

Beispiel 5 (Die Eulersche Zahl auf sechs Stellen)

Wie viele Glieder der Reihe $e = \sum \frac{1}{k!}$ braucht man für einen Fehler unter 10^{-6}?

Für $f(x) = e^x$, $a = 0$, $x = 1$ ist $R_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$ mit 0, also $R_n(1)$. Es ist $\frac{3}{9!} \approx 8{,}3 \cdot 10^{-6}$ noch zu groß, aber $\frac{3}{10!} \approx 8{,}3 \cdot 10^{-7}$ klein genug. Mit $n = 9$, also den Gliedern bis $\frac{1}{9!}$, erhält man $e \approx 2{,}718282$.

Potenzreihen und ihr Konvergenzbereich

Lässt man den Grad gegen unendlich gehen, entsteht die Taylorreihe, ein Spezialfall einer Potenzreihe $\sum a_k (x-a)^k$. Jede Potenzreihe hat einen Konvergenzradius ρ: Für $|x-a|$ konvergiert sie absolut, für $|x-a| > \rho$ divergiert sie. Auf dem Rand $|x-a| = \rho$ ist alles möglich, deshalb müssen die Randpunkte mit den Kriterien für Reihen einzeln untersucht werden. Den Radius berechnet man meist mit dem Quotientenkriterium als [redacted], falls dieser Grenzwert existiert.

Beispiel 6 (Konvergenzintervall mit Randpunkten)

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

Es ist [redacted], also $\rho = 1$. Für $x = 1$ entsteht die harmonische Reihe, die divergiert. Für $x = -1$ entsteht $\sum \frac{(-1)^k}{k}$, die nach Leibniz konvergiert. Der Konvergenzbereich ist das halboffene Intervall $[-1, 1)$.

Mit Potenzreihen rechnen

Innerhalb des Konvergenzradius verhalten sich Potenzreihen wie Polynome mit unendlich vielen Gliedern: Man darf sie addieren, mit Zahlen multiplizieren, gliedweise ableiten und gliedweise integrieren, ohne dass sich der Radius ändert. Außerdem darf man Ausdrücke einsetzen. Dadurch erhält man aus wenigen bekannten Reihen viele neue, ohne Ableitungen auszurechnen. Aus $\frac{1}{1+t} = \sum (-t)^k$ folgt durch Integration $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$; setzt man $t = x^2$ ein und integriert, erhält man $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$. Aus e^t mit $t = -x^2$ wird $e^{-x^2} = \sum \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$, eine Funktion ohne elementare Stammfunktion, deren Integral man über die Reihe trotzdem beliebig genau berechnen kann.

Beispiel 7 (Ein Integral ohne Stammfunktion)

Berechnen Sie $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ näherungsweise.

Gliedweise integriert: $\int_0^1 \sum \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} dx = \sum \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \dots$. Die ersten fünf Glieder ergeben $0{,}74749$. Da die Reihe alternierend ist, beträgt der Fehler höchstens das nächste Glied $\frac{1}{1320} \approx 0{,}00076$. Der genaue Wert ist $0{,}746824$.

Beispiel 8 (Grenzwerte mit Taylor)

Berechnen Sie $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Mit $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ wird der Zähler zu $-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$. Nach Division durch x^3 bleibt $-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} - \dots \to -\frac{1}{6}$. Taylorentwicklungen ersetzen hier dreimaliges Anwenden der Regel von L'Hospital.

So gehst du vor: Konvergenzbereich einer Potenzreihe

1. Den Mittelpunkt a und die Koeffizienten a_k ablesen; bei Reihen mit nur geraden Potenzen x^2 als neue Variable auffassen.

2. Den Radius mit dem Quotienten $\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ oder mit $\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$ berechnen.
3. Die beiden Randpunkte $a \pm \rho$ einsetzen und die entstehenden Zahlenreihen mit Leibniz, Vergleich oder dem notwendigen Kriterium untersuchen.
4. Den Bereich als Intervall angeben und die Ränder ausdrücklich ein- oder ausschließen.

Beispiel 9 (Entwicklung an einer anderen Stelle)

Bestimmen Sie T_2 von $f(x) = \sin x$ um $a = \frac{\pi}{6}$ und nähern Sie $\sin 32^\circ$.

Es ist $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. Damit $T_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2$. Der Unterschied 2° entspricht $0{,}034907$ im Bogenmaß. Eingesetzt erhält man $0{,}5 + 0{,}030230 - 0{,}000305 = 0{,}529925$; der genaue Wert ist $0{,}529919$. Man wählt die Entwicklungsstelle also dort, wo man die Funktionswerte exakt kennt und wo sie nahe am gesuchten Argument liegt.

Achtung: Typische Fehler

Ein Taylorpolynom ist nur in der Nähe der Entwicklungsstelle eine gute Näherung; weit entfernt kann es völlig danebenliegen. Der Konvergenzradius hat nichts mit dem Definitionsbereich der Funktion zu tun: $\frac{1}{1+x^2}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, ihre Reihe um 0 konvergiert aber nur für $|x|$. Und selbst eine überall konvergente Taylorreihe muss nicht gegen die Funktion konvergieren: Bei $f(x) = e^{-1/x^2}$ (mit $f(0) = 0$) sind alle Ableitungen in 0 gleich null, die Taylorreihe ist die Nullfunktion. Vergessen Sie auch nicht die Fakultäten im Nenner.

Wusstest du? Taylor, Maclaurin und die Pendeluhr

Brook Taylor veröffentlichte die allgemeine Formel 1715 in London, Colin Maclaurin machte die Entwicklung um 0 populär, die deshalb oft Maclaurin-Reihe heißt. In der Physik benutzt man ständig die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ für kleine Winkel. Mit ihr wird die Pendelgleichung lösbar, und man erhält die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, die Christiaan Huygens für seine Pendeluhren nutzte.

Hinweis: Standardreihen auswendig

Fünf Reihen sollten Sie sicher beherrschen: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$ und $\ln(1+x)$, jeweils mit Konvergenzbereich. Fast alle Klausuraufgaben lassen sich durch Einsetzen, Multiplizieren, Ableiten oder Integrieren auf diese fünf zurückführen. Das spart viel Zeit gegenüber dem Berechnen höherer

Ableitungen. Bei Fehlerabschätzungen nennen Sie stets das Intervall, auf dem Sie die Ableitung abschätzen, und runden Sie Schranken immer nach oben, nie nach unten. Bei alternierenden Reihen ist die Leibniz-Schranke meist bequemer als das Lagrange-Restglied. Prüfen Sie berechnete Näherungen zur Sicherheit mit dem Taschenrechner, wenn er erlaubt ist.

Merke: Das Wichtigste auf einen Blick

- Taylorpolynom $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$: stimmt in a mit f bis zur n-ten Ableitung überein; T_1 ist die Tangente.
- Restglied nach Lagrange $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ mit ξ zwischen a und x; liefert garantierte Fehlerschranken.
- Standardreihen um 0: $e^x = \sum \frac{x^k}{k!}$, $\sin x = \sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos x = \sum \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, $\frac{1}{1-x} = \sum x^k$, $\ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}$.
- Konvergenzradius [redacted] (falls existent): Konvergenz für $|x-a|$, Divergenz für $|x-a| > \rho$, Randpunkte einzeln prüfen.
- Innerhalb des Konvergenzradius darf man Potenzreihen gliedweise ableiten, integrieren und Ausdrücke einsetzen; der Radius bleibt gleich.
- Die Taylorreihe muss nicht gegen f konvergieren (Beispiel e^{-1/x^2}); der Radius kann kleiner als der Definitionsbereich sein ($\frac{1}{1+x^2}$).
- Anwendungen: Näherungswerte mit Fehlerschranke, Grenzwerte (statt L'Hospital), Integrale ohne elementare Stammfunktion, Kleinwinkelnäherung.

Achtung

Typische Fehler: den Faktor $\frac{1}{k!}$ vergessen, bei $\sin$ und $\cos$ nur gerade oder ungerade Potenzen erwarten, die Randpunkte beim Konvergenzbereich ignorieren, und die Reihe außerhalb des Konvergenzradius benutzen (etwa $\frac{1}{1-x}$ für $x = 2$). Auch bei Reihen mit Lücken (nur gerade Potenzen) muss man den Quotienten $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ über die Reihenglieder, nicht über die Koeffizienten, bilden.

Ottos Tipp

Versuchen Sie zuerst, eine Reihe auf bekannte Standardreihen zurückzuführen (Substitution $x \to x^2$, Ableiten, Integrieren), bevor Sie viele Ableitungen berechnen.