Arbeitsblatt - Taylorreihen und Potenzreihen

Klasse: Studium 1 Semester · 20

Der Rechenweg muss angegeben werden.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 – Die Exponentialfunktion annähern

Gegeben ist $f(x) = e^x$ mit der Entwicklungsstelle $a = 0$.

a) Bestimmen Sie T_1, T_2 und T_3.
b) Berechnen Sie $T_3(0{,}5)$ und vergleichen Sie mit $e^{0{,}5} \approx 1{,}6487213$.
c) Erklären Sie, warum alle Koeffizienten so einfach sind.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 – Der Kosinus für kleine Winkel

Gegeben ist $f(x) = \cos x$ mit der Entwicklungsstelle $a = 0$.

a) Berechnen Sie die Ableitungen bis zur vierten Ordnung und ihre Werte in 0.
b) Geben Sie T_4 an. Warum fehlen die ungeraden Potenzen?
c) Berechnen Sie $T_4(0{,}2)$ und vergleichen Sie mit $\cos 0{,}2 \approx 0{,}9800666$.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 – Wurzeln ohne Taschenrechner

Gegeben ist $f(x) = \sqrt{x}$ mit der Entwicklungsstelle $a = 4$.

a) Bestimmen Sie $f(4)$, $f'(4)$ und $f''(4)$.
b) Stellen Sie T_2 auf.
c) Nähern Sie $\sqrt{4{,}1}$ und vergleichen Sie mit dem Taschenrechnerwert $2{,}0248457$.

Aufgabe 4

Aufgabe 4 – Logarithmus um 1

Gegeben ist $f(x) = \ln x$ mit der Entwicklungsstelle $a = 1$.

a) Bestimmen Sie die Ableitungen bis zur dritten Ordnung und T_3.
b) Nähern Sie $\ln 1{,}2$ und vergleichen Sie mit $0{,}1823216$.
c) Schätzen Sie den Fehler mit dem Lagrange-Restglied ab.

Aufgabe 5

Aufgabe 5 – Konvergenzradien bestimmen

Bestimmen Sie den Konvergenzradius mit .

a) $\sum \frac{x^k}{2^k}$
b) $\sum k x^k$
c) $\sum \frac{x^k}{k!}$
d) $\sum k!\, x^k$

Aufgabe 6

Aufgabe 6 – Konvergenzbereiche mit Randpunkten

Bestimmen Sie den genauen Konvergenzbereich einschließlich der Randpunkte.

a) $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$
b) $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^2}$
c) $\sum_{k\geq 0} \frac{(x-2)^k}{3^k}$

Aufgabe 7

Aufgabe 7 – Die Pendeluhr

Für kleine Auslenkungen ersetzt man in der Pendelgleichung $\sin\varphi$ durch φ (Bogenmaß). Dadurch wird die Gleichung lösbar.

a) Rechnen Sie 10° ins Bogenmaß um und vergleichen Sie φ mit $\sin\varphi$.
b) Wie groß ist der relative Fehler in Prozent?
c) Schätzen Sie den Fehler mit dem nächsten Glied der Sinusreihe ab.
d) Bis zu welchem Winkel ist der relative Fehler kleiner als $1\,\%$? Verwenden Sie $\frac{\varphi - \sin\varphi}{\sin\varphi} \approx \frac{\varphi^2}{6}$.

Aufgabe 8

Aufgabe 8 – Der Sinus im Taschenrechner

Ein einfacher Rechner berechnet $\sin x$ für $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ mit dem Taylorpolynom $T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

a) Berechnen Sie $T_5(0{,}5)$.
b) Vergleichen Sie mit dem genauen Wert $0{,}4794255$.
c) Zeigen Sie mit dem Lagrange-Restglied, dass der Fehler für $x = 0{,}5$ höchstens $\frac{0{,}5^7}{5040}$ beträgt, und berechnen Sie diese Zahl.
d) Warum genügt es, $\sin x$ nur für $|x| \leq \frac{\pi}{4}$ zu berechnen?

Aufgabe 9

Aufgabe 9 – Wie stark ist die Erde gekrümmt?

Ein Beobachter steht am Meer und blickt über eine ruhige Wasserfläche. Die Erde ist eine Kugel mit dem Radius $R = 6371$ km. Für einen Punkt im Abstand s (gemessen auf der Oberfläche) liegt die Oberfläche um $h = R\left(1 - \cos\frac{s}{R}\right)$ unter der Tangentialebene.

a) Nähern Sie h mit $\cos u \approx 1 - \frac{u^2}{2}$.
b) Berechnen Sie h für $s = 10$ km in Metern.
c) Ein Leuchtturm ist 30 km entfernt. Wie viel seiner Höhe ist hinter der Erdkrümmung verborgen?
d) Warum ist die Näherung hier hervorragend?

Aufgabe 10

Aufgabe 10 – Die 70er-Regel beim Sparen

Banker schätzen die Verdopplungszeit eines Guthabens bei $p\,\%$ Zins mit der „70er-Regel“: Verdopplungszeit $\approx \frac{70}{p}$ Jahre. Genau gilt $n = \frac{\ln 2}{\ln(1+p/100)}$.

a) Begründen Sie die Regel mit $\ln(1+x) \approx x$ für kleine x.
b) Berechnen Sie die genaue Verdopplungszeit bei $2\,\%$ und bei $7\,\%$ und vergleichen Sie mit der Regel.
c) Warum wird die Regel bei hohen Zinssätzen ungenauer?

Aufgabe 11

Aufgabe 11 – Schnelle Teilchen

In der Relativitätstheorie ist die Energie eines Teilchens der Masse m mit der Geschwindigkeit v gleich $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

a) Entwickeln Sie $(1-u)^{-1/2}$ um $u = 0$ bis zum linearen Glied.
b) Folgern Sie $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ und deuten Sie die beiden Summanden.
c) Berechnen Sie für $v = 0{,}1c$ den genauen Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ und die Näherung.
d) Für welche Geschwindigkeiten ist die klassische Physik eine gute Näherung?

Aufgabe 12

Aufgabe 12 – Die Glockenkurve integrieren

Für eine standardnormalverteilte Größe Z gilt $P(0 \le Z \le 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$. Eine elementare Stammfunktion gibt es nicht.

a) Entwickeln Sie $e^{-x^2/2}$ in eine Potenzreihe.

b) Integrieren Sie gliedweise und zeigen Sie $\int_0^1 e^{-x^2/2}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!(2k+1)}$.
c) Berechnen Sie die Summe der ersten fünf Glieder und die Wahrscheinlichkeit.
d) Wie groß ist der Fehler höchstens?

Aufgabe 13

Aufgabe 13 – Reihen ableiten und integrieren

Ausgangspunkt ist die geometrische Reihe $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $|x|$.

a) Leiten Sie gliedweise ab und folgern Sie $\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
b) Berechnen Sie damit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.
c) Integrieren Sie gliedweise von 0 bis x und zeigen Sie $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.
d) Setzen Sie $x = \frac{1}{2}$ ein und nähern Sie $\ln 2$ mit fünf Gliedern.

Aufgabe 14

Aufgabe 14 – Die Kreiszahl mit Machin

Aus $\frac{1}{1+t^2} = \sum (-1)^k t^{2k}$ erhält man durch Integration $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ für $|x| \le 1$. John Machin berechnete 1706 mit der Formel $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ hundert Stellen von π.

a) Warum ist die Reihe für $x = 1$ (Leibniz-Reihe) für Berechnungen ungeeignet?
b) Berechnen Sie $\arctan\frac{1}{5}$ mit zwei und mit drei Gliedern sowie $\arctan\frac{1}{239}$ mit einem Glied.
c) Berechnen Sie damit Näherungen für π.
d) Erklären Sie, warum die Machin-Formel so schnell konvergiert.

Aufgabe 15

Aufgabe 15 – Grenzwerte mit Taylorreihen

Berechnen Sie die Grenzwerte für $x \to 0$, indem Sie die Standardreihen einsetzen.

a) $\lim \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
b) $\lim \frac{x - \sin x}{x^3}$
c) $\lim \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$
d) $\lim \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

Aufgabe 16

Aufgabe 16 – Die Eulersche Zahl auf sechs Stellen

Die Zahl e soll mit der Reihe $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ auf sechs Nachkommastellen genau berechnet werden.

a) Stellen Sie das Lagrange-Restglied für $f(x) = e^x$, $a = 0$, $x = 1$ auf.
b) Zeigen Sie 0.
c) Bestimmen Sie das kleinste n mit $\frac{3}{(n+1)!}$.
d) Berechnen Sie die Partialsumme und geben Sie e auf sechs Stellen an.
e) Wie viele Glieder bräuchte man mit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für vergleichbare Genauigkeit? Schätzen Sie mit $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{e}{2n}$.

Aufgabe 17

Aufgabe 17 – Eine Funktion, die ihre Taylorreihe täuscht

Gegeben ist $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$.

a) Berechnen Sie $f(0{,}5)$ und $f(0{,}1)$. Wie sieht der Graph nahe 0 aus?
b) Zeigen Sie $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f'(0) = 0$ mit dem Differenzenquotienten.
c) Man kann zeigen, dass alle Ableitungen in 0 verschwinden. Wie lautet dann die Taylorreihe um 0?
d) Für welche x stimmt die Taylorreihe mit f überein? Was lernen Sie daraus?

Aufgabe 18

Aufgabe 18 – Differentialgleichungen mit Potenzreihen

Viele Differentialgleichungen löst man mit dem Ansatz $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

a) Setzen Sie den Ansatz in $y' = y$ mit $y(0) = 1$ ein und leiten Sie die Rekursion $a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$ her.
b) Lösen Sie die Rekursion und erkennen Sie die Lösung.
c) Lösen Sie ebenso $y'' = -y$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Welche Funktion entsteht?
d) Warum ist der Ansatz gerechtfertigt?

Aufgabe 19

Aufgabe 19 – Warum der Radius nur 1 ist

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und beliebig oft differenzierbar.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe um 0 mit der geometrischen Reihe.
b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und untersuchen Sie $x = 1$.
c) Erklären Sie den kleinen Radius mit den komplexen Nullstellen des Nenners.
d) Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe um $a = 1$?

Aufgabe 20

Aufgabe 20 – Knobelaufgabe: e ist irrational

Joseph Fourier gab einen kurzen Beweis dafür, dass e irrational ist. Nehmen Sie an, es wäre $e = \frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q, $q \geq 2$. Setzen Sie $x = q!\left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right)$.

a) Zeigen Sie, dass x eine ganze Zahl ist.
b) Zeigen Sie $x = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} > 0$.
c) Schätzen Sie ab: $\frac{q!}{k!} \leq \frac{1}{(q+1)^{k-q}}$, und folgern Sie x.
d) Führen Sie den Widerspruch zu Ende.